Teoria miary i całki 2012/2013

Seria IV, 25 III 2013 r.

Javier de Lucas

Zadanie 1. Dany dowolny zbiór X, zdefiniujemy funkcję μ^* na $\mathfrak{P}(X)$ postaci

$$\mu^*(E) = \begin{cases} \text{liczba elementów zbioru } E \text{ jeśli } E \text{ jest skończony} \\ \infty \text{ jeśli } E \text{ to nieskończony zbiór} \end{cases} \tag{1}$$

(a) Wykaż, że μ^* jest miarą zewnętrzną na X.

(b) Wykaż, że μ^* jest addytywna na $\mathfrak{P}(X)$

(c) Wykaż, że μ^* jest miarą na σ-algebrze $\mathfrak{P}(X)$.

(d) Wykaż, że $\mathfrak{M}(\mu^*) = \mathfrak{P}(X)$, tj. każdy $E \in \mathfrak{P}(x)$ jest μ^*-mierzalny.

Zadanie 2. Niech X będzie nieskończonym zbiorem i μ^* będzie miarą (1). Wykaż, że istnieje malejący ciąg $(E_n : n \in \mathbb{N})$ w $\mathfrak{P}(X)$ taki, że $E_n \downarrow \emptyset$, tj. $\lim_{n\to\infty} E_n = \emptyset$ i $\lim_{n\to\infty} \mu^*(E) \neq 0$.

Zadanie 3. Niech μ^* będzie zewnętrzną miarą na X, wykaż, że jeżeli μ^* jest addytywna na $\mathfrak{P}(X)$, to jest przeliczalnie addytywna na $\mathfrak{P}(X)$.

Zadanie 4. Niech μ^* będzie miarą zewnętrzną na X, wykaż, że istnieje niemierzalny podzbiór X wtedy i tylko wtedy μ^* nie jest nieprzeliczalnie addytywna na $\mathfrak{P}(X)$.

Zadanie 5. Niech $(E_n : n \in \mathbb{N})$ będzie malejącym ciągiem w mierzalnej przestrzeni Lebesga $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_L, \mu_L)$ postaci $E_n = [n, \infty)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Obliczyć $\lim_{n\to\infty} E_n$, $\mu_L(\lim_{n\to\infty} E_n)$ i $\lim_{n\to\infty} \mu_L(E_n)$.

Zadanie 6. Dany ciąg $(E_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{M}_L$ postaci $E_n = [0, 1) \cup [n, n + 1)$ dla n nieparzystej i $E_n = [0, 1) \cup [n, n + 2)$ dla n parzystej. Wykaż, że

- istnieje $\lim_{n\to\infty} E_n$ i oblicz ją.
- nie istnieje $\lim_{n\to\infty} \mu_L(E_n)$.

Zadanie 7. Dla następujących ciągów $(E_n : n \in \mathbb{N}) \subset \mathfrak{M}_L$ postaci

- $E_n = [0, 1) \cup [n, n + 1)$ dla $n \in \mathbb{N}$.
- $E_n = [0, 1) \cup [n, 2n)$ dla $n \in \mathbb{N}$.
- $E_n = [n, n + 1)$ dla $n \in \mathbb{N}$.

wykaż, że

- istnieje $\lim_{n\to\infty} E_n$ i oblicz ją.
- istnieje $\lim_{n\to\infty} \mu_L(E_n)$ i $\lim_{n\to\infty} \mu_L(E_n) \neq \mu_L(\lim_{n\to\infty} E_n)$.