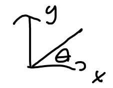
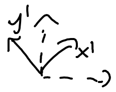
Cwiczenia

5 października 2015
00:01

1. Macierz Jonesa polaryzatora ustawionego pod kątem θ do poziomu



W obróconym układzie współrzędnych $x'y'$

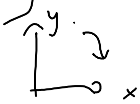


wyglądałby tak

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Żeby zapisać w standardowym układzie muszę użyć macierzy obrotu współrzędnych w $x'y'$ do układu $x\,y$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Czyli:

$$P_\theta = R_\theta^{-1} \, P \, R_\theta =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

2. Fala o amplitudzie E_0 i polaryzacji kołowej ⟲ pada na  θ. Napisz wyjściowy wektor Jonesa

$$\mathcal{E}_{out} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2\theta + i\cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta + i\sin^2\theta \end{bmatrix} = \frac{E_0 e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \stackrel{P}{=} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

tracimy połowę energii i mamy pol liniową pod kątem θ.

3. Foton o polaryzacji ⟷ zostaje przepuszczony przez serię N polaryzatorów pod kątami $\frac{\theta}{N}, \ldots, \theta$,

Znajdź amplitudę i polaryzację wyjściową
co się dzieje gdy $N \to \infty$

co się dzieje gdy $N \to \infty$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{N} & \cos\frac{\theta}{N}\sin\frac{\theta}{N} \\ \sin\frac{\theta}{N}\cos\frac{\theta}{N} & \sin^2\frac{\theta}{N}\end{bmatrix} E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{N} \\ \sin\frac{\theta}{N}\cos\frac{\theta}{N}\end{bmatrix} = E_0 \cos\frac{\theta}{N} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{N} \\ \sin\frac{\theta}{N}\end{bmatrix}$$

amplituda spada za każdym razem o $\cos\frac{\theta}{N}$

$$E_0' = \left(\cos\frac{\theta}{N}\right)^N E_0 \xrightarrow{N\to\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)\right)^N$$

$$\simeq 1 - N\frac{\theta^2}{2N^2} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

4. płytka falowa $Q_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\varphi}{2}} \end{bmatrix}$

$Q_{\frac{\pi}{2}}$ - ćwierćfalówka $\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$

Q_π = półfalówka $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

Co robią $Q_{\frac{\pi}{2}}, Q_\pi$

- ze stanem $|\leftrightarrow\rangle$: nic
- ze stanem $|\nearrow\rangle$

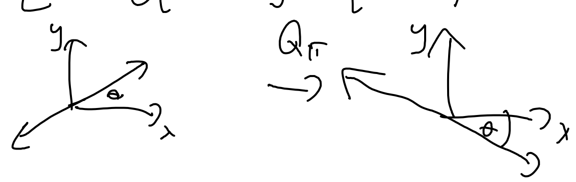
wszystko tak samo dla 1 fotonu i dla klasycznej fali

$$Q_{\frac{\pi}{2}}|\nearrow\rangle = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = |\circlearrowleft\rangle$$

$$Q_\pi|\nearrow\rangle = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = |\nwarrow\rangle$$

Co robi półfalówka ze stanem $|\theta\rangle = \cos\theta|\leftrightarrow\rangle + \sin\theta|\updownarrow\rangle$

$$Q_\pi|\theta\rangle = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \overset{\varphi}{=} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{bmatrix}$$



W związku z tym półfalówka obraca o kąt 2θ
Można ją wykorzystać do „obracania" liniowej polaryzacji

5. Napisz macierz Jonesa półfalówki obracającej o kąt θ

[illegible]

$$Q^{\theta}_{\pi} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}-\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\cos 2\theta & -\sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix} \overset{P}{=} \begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta\end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\cos 2\theta & \sin 2\theta\\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta\end{bmatrix}$$ (obrót o 2θ + półfalówka)

6. Porównaj co robi ze stanem $|\leftrightarrow\rangle$ układ

a) $|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow$ $\boxed{Q_{\pi}^{\theta=22{,}5^\circ}}$ — $\boxed{Q_{\frac{\pi}{4}}}$

b) $|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow$ $\boxed{Q_{\frac{\pi}{4}}}$ — $\boxed{Q_{\pi}^{\theta=22{,}5^\circ}}$

Kolejność ma znaczenie!

a) $$|\psi_{out}\rangle = \begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\ 1\end{bmatrix} = |\circlearrowleft\rangle$$

b) $$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}i & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \overset{P}{=} |\nearrow\rangle$$

7. Foton o polaryzacji θ_1 pada na polaryzator ustawiony pod kątem θ_2. Jakie jest pr. przejścia

$$P_{\theta_1}|\theta_2\rangle = \begin{pmatrix}\cos^2\theta_1 & \cos\theta_1\sin\theta_1\\ \cos\theta_1\sin\theta_1 & \sin^2\theta_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta_2\\ \sin\theta_2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\cos^2\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_1\sin\theta_2\\ \cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin\theta_2\end{pmatrix}$$

} pr. przejścia = fragment energii fali przechodzi dla klasycznej wiązki

$$p = \left(\cos^2\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_1\sin\theta_2\right)^2 + \left(\cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin\theta_2\right)^2$$

$$= \cos^4\theta_1\cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\cos^3\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$
$$+ \cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^4\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\sin^3\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2$$

$$= \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= \cos^2(\theta_1 - \theta_2)$$

9. Ogólne operacje na qubitach - ile parametrów.

$$SU(2): \begin{bmatrix} \cos\theta\, e^{i\alpha} & \sin\theta\, e^{i\gamma} \\ -\sin\theta\, e^{-i\gamma} & \cos\theta\, e^{-i\alpha} \end{bmatrix}$$

10. $|\langle\psi|\psi'\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \vec{s}' \cdot \vec{s}''\right)$

Zwróćmy uwagę że wektor Blocha jest niezależny od fazy

$SU(2) \to SO(3)$ w sferze Blocha.

$|\psi\rangle\langle\psi| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{s}\cdot\vec{\sigma}\right)$ $\qquad U|\psi\rangle\langle\psi|U^\dagger = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + (O_u\vec{s})\,\vec{\sigma}\right)$

$U = e^{-\frac{i}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{n}\varphi}$ obrót wokół osi $\vec{n}$ o kąt φ

sprawdźmy dla $\vec{n} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$e^{-\frac{i}{2}\sigma_z\varphi}\,\sigma_x\, e^{\frac{i}{2}\sigma_z\varphi} \qquad e^{A}Be^{-A} = B + [A,B] + \frac{1}{2}[A,[A,B]] + \dots$$

Zmiana znaku obrotu odpowiada pętli pełnej $SU(2)$

podwójne nakrycie $SO(3)$.

Spin $\frac{1}{2}$.