11 - Cwiczenia

3 maja 2011
11:13

1. Jakiemu obrotowi sfery Blocha odpowiada

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

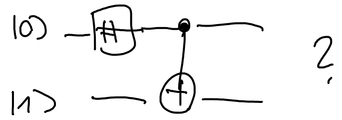
$$H\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+i \\ 1-i \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

$$H\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = |0\rangle \qquad H\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = |1\rangle$$

Obrót o π wokół osi 45° do poziomu

2. Zapisać macierz unitarną odpowiadającą

3. Przykład prostego obwodu



$$|0\rangle|1\rangle \xrightarrow{H\otimes 1} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\otimes|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|1\rangle) \xrightarrow{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle)$$

↑ stan produktowy ↑ stan splątany

Zapisać macierz tej transformacji:

$$U = U_{CNOT} \cdot H\otimes 1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jeśli będą problemy, wytłumaczmy dokładnie jak liczyć

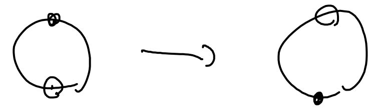
$$A\otimes B \qquad \langle j_1|\otimes\langle j_2|\, A\otimes B\, |i_1\rangle\otimes|i_2\rangle = A^{j_1}_{i_1} B^{j_2}_{i_2}$$

$$A \otimes B = \left[\begin{array}{c|c} A^0_0 \cdot B & A^0_1 B \\ \hline A^1_0 B & A^1_1 B \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A^0_0 B^0_0 & A^0_0 B^0_1 & \cdots \\ A^0_0 B^1_0 & A^0_0 B^1_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

4. Zbudować bramkę NOT z [H] i [φ]

$U_{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

na sferze Blocha



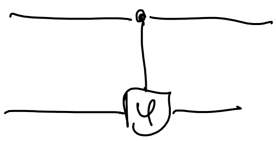
obrót o π wokół osi x (może y?)

[φ] - obrót wokół z

—[H]—[φ=π]—[H]— =

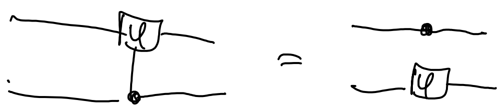
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$ ok

5. Controlled phase gate



$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & e^{i\varphi} \end{bmatrix}$$

ciekawostka:

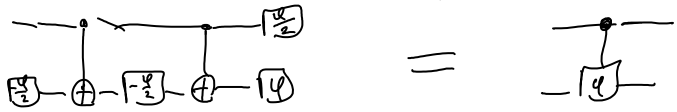


Zbudujmy ją z [CNOT], [H] i [φ] ...

Najpierw dla $\varphi = \pi$ $\quad U = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$

Intuicja: zamiast NOT - obrót wokół osi x o π.
Więc w bazie $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$ to będzie $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ czyli wystarczy przed CNOT, zmienić bazę a po CNOT wrócić

Jak zrobić dowolne φ? Trochę trudniej

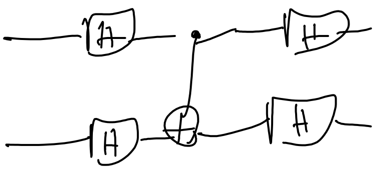


$|c\rangle|\psi\rangle \longrightarrow |c\rangle|\psi\rangle$ } bo który CNOT nie zadziała
} a $[-\frac{\varphi}{2}]-[-\frac{\varphi}{2}]-[\varphi]- =$ ——

$|1\rangle|0\rangle \longrightarrow |1\rangle|0\rangle \longrightarrow |1\rangle|1\rangle \longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|1\rangle \longrightarrow$
$|1\rangle|1\rangle \longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|1\rangle \longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|0\rangle \longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|0\rangle \longrightarrow$

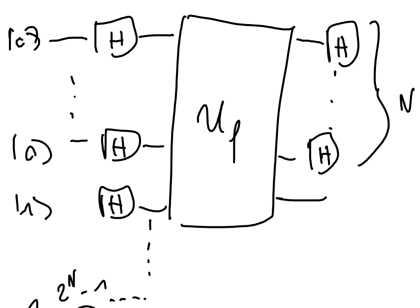
$\longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|0\rangle \longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|0\rangle \longrightarrow |1\rangle|0\rangle$
$\longrightarrow e^{-\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|1\rangle \longrightarrow e^{\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle|1\rangle \longrightarrow e^{i\varphi}|1\rangle|1\rangle$ OK

6.



= ?

7. Deutsch-Josa?



$f(x_1, \dots x_N) = y$ albo stała
albo zbalansowana.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{x=0}^{2^N-1} |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \xrightarrow{U_f} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_x (-1)^{f(x)} |x\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \quad \frac{1}{\sqrt{2^N}}$$

$$H^{\otimes N}|x_1\rangle\otimes\dots\otimes|x_N\rangle = \sum_{y_1\dots y_N}(-1)^{x\cdot y}|y_1\rangle\otimes\dots|y_N\rangle\,\frac{1}{2^N}$$

$$\xrightarrow{H^{\otimes N}\otimes I}\ \frac{1}{2^N}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sum_{x\,y}(-1)^{f(x)+x\cdot y}\,|y\rangle\right)\left(|0\rangle-|1\rangle\right)$$

jeśli $f(x)$ = stała to dla $y=0$ $|0\rangle^{\otimes N}$

mamy $\sum_x (-1)^{0+f(x)} = \pm 2^N$

a jeśli zbalansowana to $\sum_x (-1)^{0+f(x)} = 0$

Czyli trzeba sprawdzić czy N qubitów jest w stanie $|0\rangle^{\otimes N}$ czy nie?