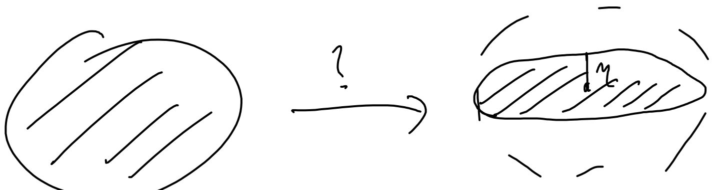
9 - Cwiczenia

29 listopada 2015
22:23

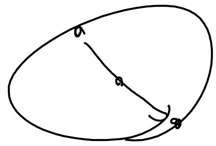
1. Jakie trans sfery Blocha są możliwe pod względem odwzorowań CP.

a) Czy możliwy jest np naleśnik?



$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ \eta s_z \end{pmatrix}$$

b) czy możliwe jest np. universal NOT czyli taki że $\forall_{|\psi\rangle} \Lambda_{NOT}(|\psi\rangle\langle\psi|) = |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|$?



$$\vec{s} \longrightarrow -\vec{s}$$

$$\rho = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{s}\cdot\vec{\sigma}\right)$$

$$\Lambda(\rho) = \frac{1}{2}\left(\Lambda(\mathbb{1}) + s_x \Lambda(\sigma_x) + s_y \Lambda(\sigma_y) + s_z \Lambda(\sigma_z)\right)$$

2 liniowość wystarczy wiedzieć jak działa na $\Lambda(\sigma_i)$

a)
$$\Lambda(\sigma_x) = \Lambda(\sigma_x)$$
$$\Lambda(\mathbb{1}) = \Lambda(\mathbb{1})$$
$$\Lambda(\sigma_y) = \Lambda(\sigma_y)$$
$$\Lambda(\sigma_z) = \eta\Lambda(\sigma_z)$$

Weźmy $\rho_{SA} = |\psi^-\rangle_{SA}\langle\psi^-| =$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} - \sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_z \otimes \sigma_z\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} - \sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y - \sigma_z \otimes \sigma_z \right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & & -1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ -1 & & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 2 & -2 & \\ & -2 & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ok}$$

$$\mathbb{1} \otimes T\,(\rho_{SA}) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} - \sigma_x \otimes \sigma_x - \sigma_y \otimes \sigma_y - \eta\, \sigma_z \otimes \sigma_z \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1-\eta & & & \\ & 1+\eta & -2 & \\ & -2 & 1+\eta & \\ & & & 1-\eta \end{pmatrix}$$

trzeba dodatnio określoności dla $\eta < 1$

Nie da się T!

b) $$\mathbb{1} \otimes T\,(\rho_{SA}) = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} + \sigma_x \otimes \sigma_x + \sigma_y \otimes \sigma_y + \sigma_z \otimes \sigma_z \right) =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 0 & 2 & \\ & 2 & 0 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \quad \text{też nie możliwe!}$$

Ogólny warunek:

$$\begin{bmatrix} 1+\eta_z & 0 & 0 & \eta_x+\eta_y \\ 0 & 1-\eta_z & \eta_x-\eta_y & 0 \\ 0 & \eta_x-\eta_y & 1-\eta_z & 0 \\ \eta_x+\eta_y & 0 & 0 & 1+\eta_z \end{bmatrix} \geq 0$$

Czyli $(1 \pm \eta_z)^2 \geq (\eta_x \pm \eta_y)^2$

W szczególności można mieć :

2. Niejednoznaczność reprezentacji Krausa

$$\tilde{K}_i = \sum_j u_{ij} K_j \quad \text{ta sama CP map}$$

3. Znaleźć Krausy odpowiadające opt.

phase covariant i optimal universal cloning.

$$|0\,0\,0\rangle_{12A} \longrightarrow \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|0\,0\,0\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{6}}\big(|0\,1\rangle + |1\,0\rangle\big)|1\rangle$$

$$|1\,0\,0\rangle \longrightarrow \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|1\,1\,1\rangle + \sqrt{\tfrac{1}{6}}\big(|0\,1\rangle + |1\,0\rangle\big)|0\rangle$$

Chcemy efektywnej transformacji na podukładzie 1

$$\Big\{ K_i = {}_E\langle i|\,U\,|0\rangle_E$$

w nas „E" = „2 A"

Czyli mamy 4 Krausy:

$$K_{00} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tfrac{2}{3}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tfrac{1}{6}} \end{pmatrix} \qquad K_{10} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\tfrac{1}{6}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{01} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sqrt{\tfrac{1}{6}} & 0 \end{pmatrix} \qquad K_{11} = \begin{pmatrix} \sqrt{\tfrac{1}{6}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\tfrac{2}{3}} \end{pmatrix}$$

Sprawdzamy:

$$\rho = \tfrac{1}{2}\big(\mathbb{1} + \vec{s}\cdot\vec{\sigma}\big) \qquad \Lambda(\rho) = ?$$

Wystarczy wiedzieć jak działamy na σ_i