Kwantowa korekcja błędów

W praktyce nie ma bramek idealnych, klasycznie radzimy sobie metodami korekcji błędów np. kodujemy

0 jako 000 ; jeśli wystąpi jeden błąd odtwarzamy
1 $\quad$ 111 $\quad$ logiczne wartości.

- przykład klasycznego kodu korekcji błędów

Czy można to zrobić kwantowo, żeby chronić wszystkie superpozycje?? Mamy nie tylko możliwości „bit-flip" (σ_x) ale ogólniejsze zmiany stanu...

Bit flip $\quad |0\rangle \to |1\rangle \quad , |1\rangle \to |0\rangle \quad (\sigma_x)$

Weźmy $\quad |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow \alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$

Załóżmy że zaszedł błąd „bit flip" na jednym z qubitów:

Nazwijmy $\quad C = \{ |000\rangle, |111\rangle \}$.

brak błędu	$\alpha|000\rangle + \beta|111\rangle$	$(1\otimes 1\otimes 1)\, C = C_0$
błąd na 1	$\alpha|100\rangle + \beta|011\rangle$	$(\sigma_x \otimes 1 \otimes 1)\, C = C_1$
-//- 2	$\alpha|010\rangle + \beta|101\rangle$	$(1 \otimes \sigma_x \otimes 1)\, C = C_2$
-//- 3	$\alpha|001\rangle + \beta|110\rangle$	$(1 \otimes 1 \otimes \sigma_x)\, C = C_3$

Leżą one w jednej z 4 ortogonalnych dwuwymiarowych podprzestrzeni C_i. Możemy wykonać pomiar identyfikujący w której C_i jesteśmy i naprawić błąd.

Pokażmy że będzie też dobrze dla

$U = e^{i\sigma_x \theta}$ dla dowolnego θ będziemy mogli

$U = e^{i\sigma_x \theta}$ dla każdego θ będziemy mogli naprawić błąd $= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{i\theta} & e^{i\theta} \\ e^{i\theta} & e^{i\theta} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-i\theta} & -e^{-i\theta} \\ e^{-i\theta} & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

Ogólny fakt: jak potrafimy naprawić jakieś błędy to również ich liniowe kombinacje (wprowadzamy ancillę która zapisuje rodzaj błędu) (σ_2)

phase flip $|0\rangle \to |0\rangle$, $|1\rangle \to |-1\rangle$

Poprzedni kod nie chroni nas przed phase flip — pozostajemy w tej samej podprzestrzeni C.

Ale:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \longrightarrow \alpha|{+}{+}{+}\rangle + \beta|{-}{-}{-}\rangle$$

$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ będzie chronić przed phase-flip.

Mamy teraz połączyć te kody aby być odporny na błąd niezależnie czy to bit czy phase flip

$$|0\rangle \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)\right)^{\otimes 3}$$

$$|1\rangle \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|000\rangle - |111\rangle\right)^{\otimes 3}$$

Subtelność: błąd σ_2 na 1,2,3 zmienia stan tak samo ale to nie szkodzi

Ten kod potrafi też naprawić jednoczesny bit i phase flip ($\sigma_y = i\sigma_2\sigma_x$)

Okazuje się że to wystarczy aby naprawić

17

dowolny błąd na jednym qubicie.

Niech Λ - kanał opisujący dekoherencję jednego qubitu

$$\Lambda(|\psi\rangle\langle\psi|) = \sum_i K_i |\psi\rangle\langle\psi| K_i^\dagger$$

Każdy K_i może rozłożyć w bazie σ_i

$$K_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \sigma_j$$

Czyli na wyjściu dostajemy z pewnymi prawdop. stany:

$$|\psi_i\rangle = \sum_i \varepsilon_{ij} \sigma_j |\psi\rangle$$

Czyli kombinacje bit i phase flip a te potrafimy naprawić!

Idea: Fault-tolerance: jeśli poziom błędów odpowiednio niski - możemy efektywnie naprawiać mimo, że używamy też niedoskonałych elementów

Znany Fault-tolerance threshold $F \geq 99{,}9\%$

- tu ważne że błędy nieskorelowane

Ogólne warunki na Error-correcting codes

E_a - baza op. reprezentujących błędy $\quad E = \sum_a c_a E_a$

$|\psi_i\rangle$ - stany logiczne $\quad |\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$

Tw. $\forall_{E,|\psi\rangle} \langle\psi| E^\dagger E |\psi\rangle = C(E)$

mnożenie od $|\psi\rangle$

$\Leftarrow$ mamy E-C code

Dowód

$\Rightarrow$ $\langle\psi_i|E_a^\dagger E_a|\psi_i\rangle = c(E_a)$

$\langle\psi_j|E_a^\dagger E_a|\psi_j\rangle = c(E_a)$

$\frac{1}{2}(\langle\psi_i| + \langle\psi_j|)E_a^\dagger E_a(|\psi_i\rangle + |\psi_j\rangle) = c(E_a)$

$\langle\psi_i|E_a^\dagger E_a|\psi_j\rangle = c(E_a)\delta_{ij}$

$\vdots$

$\langle\psi_i|E_a^\dagger E_b|\psi_j\rangle = C_{ab}\delta_{ij}$

hermitowskie

diagonalizujemy C_{ab} i mamy nową bazę F_a

$\langle\psi_i|F_a^\dagger F_b|\psi_j\rangle = p_a\delta_{ij}\delta_{ab}$

dzięki temu nie pomylimy stanów po zadziałaniu błędu i wiemy jaki błąd się zdarzył

Widzimy też że $\langle\psi_i|F_a^\dagger F_a|\psi_j\rangle = p_a\delta_{ij}$

czyli że działanie proporcjonalne do unitarnej na przestrzeni kodowej - odwracalne.

$\Leftarrow$ Jeśli mamy E-C to musi być

$\langle\psi|E^\dagger E|\psi\rangle = \langle\varphi|E^\dagger E|\varphi\rangle$

inaczej E zmieni stan

$E(|\psi\rangle + |\varphi\rangle) = N\left(|\psi\rangle + \frac{\langle\psi|E^\dagger E|\psi\rangle}{\langle\varphi|E^\dagger E|\varphi\rangle}|\varphi\rangle\right)$

$\langle\psi|E^\dagger E|\psi\rangle$

a to trzy gdy stan który ale inny.

Decoherence free subspaces

idea ochrony przed dekoherencją gdy szum skorelowany:

Przykład Phase noise:

oba qubity ma oba działa ten sam „szum fazowy" $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\eta} \end{pmatrix}$ (np. fluktuacje drogi optycznej niestabilne przy tej fali)

$$|00\rangle \to |00\rangle$$
$$|01\rangle \to e^{i\eta}|01\rangle$$
$$|10\rangle \to e^{i\eta}|10\rangle$$
$$|11\rangle \to e^{2i\eta}|11\rangle$$

$$|\psi\rangle = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle \to e^{i\eta}|\psi\rangle \equiv |\psi\rangle$$

superpozycja przeżywa

Przykład $\quad U \otimes U\,|\psi\rangle$

Wiemy że
$$U\otimes U = \begin{pmatrix} \overbrace{U^{(0)} = 1}^{\text{singlet}} & \\ & \underbrace{U^{(1)}}_{\text{triplet}} \end{pmatrix} \begin{matrix} |\psi_-\rangle \\ \{\psi_+, \phi_+, \phi_-\} \end{matrix}$$

$$|\psi\rangle \to \rho_{out} = p_0 P_0 + p_1 \frac{1}{3} P_1$$

Czyli możemy przesłać 1 bit klasycznej informacji

A co z koherentną superpozycją?

Jeśli mamy 4 fotony:

$$|\psi_1\rangle = |\psi_-\rangle_{12} |\psi_-\rangle_{34}$$

$$|\psi_2\rangle = -|\psi_-\rangle_{13} |\psi_-\rangle_{24}$$

$$|\psi_3\rangle = |\psi_-\rangle_{14} |\psi_-\rangle_{23}$$

sprawdzamy $|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle + |\psi_3\rangle = 0$

Czyli mamy dwuwymiarową przestrzeń wolną od dekoherencji - qubit logiczny

$$|\bar{0}\rangle = |\psi_1\rangle$$

$$|\bar{1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(|\psi_2\rangle - |\psi_3\rangle \right)$$