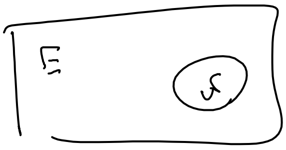
9 - q. channels

26 listopada 2015
10:11

Kanały kwantowe

Jaką postać ma ogólna ewolucja układu w kontakcie z otoczeniem:



Załóżmy, że na początku $\rho_S \otimes \rho_E$

W wyniku ewolucji unitarnej U_{SE} i śledzenia E mamy końcowy stan S

$$\rho_S' = \mathrm{Tr}_E\left(U_{SE}\, \rho_S \otimes \rho_E\, U_{SE}^\dagger \right)$$

Pewne przekształcenie liniowe z macierzy gęstości w macierze gęstości:

$$\rho_S' = \Lambda(\rho_S)$$

Jak scharakteryzować najogólniejszą postać Λ, wiemy, że to coś więcej niż unitarne, bo musimy umieć opisać dekoherencję, (ze stanów czystych robią się mieszane)

Niech $|i\rangle_E$, $i=0,\dots$ baza w E. Przyjmijmy dla uproszczenia, że $\rho_E = |0\rangle\langle 0|$.
(bez utraty ogólności możemy wybrać dowolną bazę, a stan mieszany zamienić na mieszaną ewolucję więc nic istotnie nowego)

$$\rho_S' = \sum_i {}_E\langle i|\, U_{SE}\, \rho_S(0) \otimes |0\rangle_E\langle 0|\, U_{SE}^\dagger\, |i\rangle_E$$

Zdefiniujmy $K_i = {}_E\langle i| U_{SE} |0\rangle_E$ wtedy

$$\rho_S' = \sum_i K_{,i} \, \rho_S \, K_{,i}^\dagger$$

operatory Krausa.

$$\sum_i K_i^\dagger K_i = \sum_i \langle 0| U_{SE}^\dagger |i\rangle\langle i| U_{SE} |0\rangle = \mathbb{1}$$

Ogólna ewolucja układu otwartego:

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \, \rho \, K_i^\dagger, \quad \sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$$

Postać Krausa. Prawdziwe jest również wynikanie w drugą stronę dla danych K_i, $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$ istnieje ρ_E i U_{SE} t. że $\rho_{out} = \mathrm{Tr}_E\left(U_{SE}\, \rho_{in}\otimes\rho_E \, U_{SE}^\dagger\right)$

$$U_{SE}|\psi\rangle\otimes|e_0\rangle = \sum_k K_k|\psi\rangle|e_k\rangle$$

można rozszerzyć do unitarnej na całej przestrzeni

$$\Lambda(\rho) = \mathrm{Tr}_E\left(U_{SE} \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \otimes |e_0\rangle\langle e_0| \, U_{SE}^\dagger\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}_E\left(\sum_i p_i \sum_{k,k'} K_k|\psi_i\rangle\langle\psi_i|K_{k'}^\dagger \otimes |e_k\rangle\langle e_{k'}|\right) = \sum_k K_k \, \rho \, K_k^\dagger$$

Uogólnienie ew. unitarnej na układy otwarte (kluczowe założenie – brak korelacji z otoczeniem w chwili początkowej)

Przykład

$$|0\rangle_S|0\rangle_E \xrightarrow{U_{SE}} |0\rangle_S|0\rangle_E$$

$$|1\rangle_S|0\rangle_E \rightarrow |1\rangle_S\otimes\left(\sqrt{\eta}\,|0\rangle_E + \sqrt{1-\eta}\,|1\rangle_E\right)$$

Do E wypływa niejako informacja czy S jest w stanie $|0\rangle_S$ czy $|1\rangle_S$ sprzyjając się dekoherencji stanów będących superpozycją $|0\rangle_S$ i $|1\rangle_S$.

Model pamięci którą zrobimy lecz foton...

Zn. dla op. Krausa

$$K_a = {}_E\langle a| U_{SE} |0\rangle_E$$

$$(K_a)^i_j = {}_S\langle i|{}_E\langle a| U_{SE} |j\rangle_S \otimes |0\rangle_E$$

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\eta} \end{pmatrix}$$

Sprawdzę że $\sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$ ok

$$\rho' = K_0 \rho K_0^\dagger + K_1 \rho K_1^\dagger$$

Niech $\rho = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01} \\ \rho_{10} & \rho_{11} \end{pmatrix}$

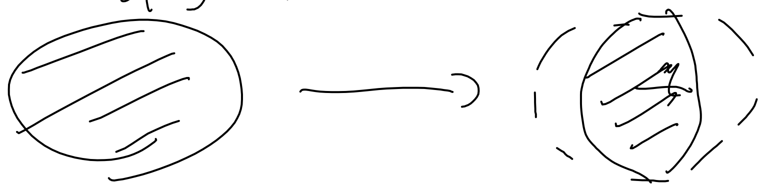
$$\rho' = \begin{pmatrix} \rho_{00} & \rho_{01}\eta \\ \rho_{10}\eta & \rho_{11} \end{pmatrix}$$

η – odpowiada za siłę dekoherencji

$\eta = 1$ brak dekoherencji, E „nic nie wie" o S

$\eta = 0$ pełna dekoherencja, E „wyłapuje pamięć" na S

obrazek sfery Blocha:



Odwzorowanie e-tłumienie dodatnie

Więc że $\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$ przekształca macierze dodatnie w dodatnie — jest odwzorowaniem dodatnim.

Ale $\Lambda_S \otimes I_A$ — działanie rozszerzenie

$$\Lambda_S \otimes I_A (\rho_{SA}) = \sum_i K_i \otimes I_A \, \rho_{SA} \, K_i \otimes I_A$$

też jest dodatnie.

Def. Matematyczna

Jeśli $\Lambda \otimes I$ jest dodatnie dla dowolnego rozszerzenia, Λ jest całkowicie dodatnie (CP - complete positive)

Tw

Każde odwz. całkowicie dodatnie jest postaci

$$\Lambda(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger$$

Wniosek

Ewolucje układów otwartych, kwantowe to odwzorowania CP.

(CPTP - jeśli zachowują ślad)

Przykład

Transpozycja jest odwzorowaniem dodatnim ale nie jest CP !

ale nie jest CP !

(więc to co stosujemy kryterium PPT do wykrywania splątania)

Pomiary uogólnione

O postaci Krausa możemy myśleć też w kontekście pomiarów uogólnionych

jeśli też na E mamy stan $|i\rangle\langle i|_E$

to efektywne prawdopodobieństwo

$$p_i = \mathrm{Tr}\left(\rho_S \underbrace{K_i^\dagger K_i}_{\Pi_i}\right)$$

$$\sum_i \Pi_i = \mathbb{1} \qquad \Pi_i \geq 0 \quad - \text{pomiar uogólniony.}$$