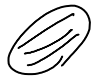
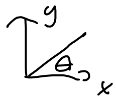
Cwiczenia 1

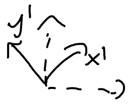
15 lutego 2011
22:29

1. Macierz Jonesa polaryzatora ustawionego pod kątem θ do poziomu





W obróconym układzie współrzędnych $x'y'$



wyglądałby tak

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Żeby zapisać w standardowym układzie musimy użyć macierzy obrotu współrzędnych w x,y do układu $x'y'$

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Czyli:

$$P_\theta = R_\theta^{-1} \, P \, R_\theta =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

2. Oblicz macierz Jonesa dla

$$P_\theta^2 = P_\theta$$

3. Fala o amplitudzie E_0 i polaryzacji kołowej ↻ pada na $_\theta$. Napisz wyjściowy wektor Jonesa

$$E_{out} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \cos^2\theta + i\cos\theta\sin\theta \\ \ldots \end{bmatrix} = \frac{E_0 e^{i\theta}}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \overset{P}{=} \frac{E_0}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{-c}{\sqrt{2}}\left[\cos\theta + i\sin\theta\right) = \frac{-c}{\sqrt{2}}\left[\sin\theta\,\theta\right) \quad \sqrt{2}(\sin\theta)$$

tracimy połowę energii i mamy pol liniową pod kątem θ.

4. Wiązka o polaryzacji $|\leftrightarrow\rangle$ zostaje przepuszczona przez serię N polaryzatorów pod kątami $\frac{\theta}{N}, \dots, \theta$.

Znajdź amplitudę i polaryzację wyjściową, co się dzieje gdy $N \to \infty$

$$\begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{N} & \cos\frac{\theta}{N}\sin\frac{\theta}{N} \\ \sin\frac{\theta}{N}\cos\frac{\theta}{N} & \sin^2\frac{\theta}{N} \end{bmatrix} E_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = E_0 \begin{bmatrix} \cos^2\frac{\theta}{N} \\ \sin\frac{\theta}{N}\cos\frac{\theta}{N} \end{bmatrix} = E_0 \cos\frac{\theta}{N} \begin{bmatrix} \cos\frac{\theta}{N} \\ \sin\frac{\theta}{N} \end{bmatrix}$$

amplituda spada za każdym razem o $\cos\frac{\theta}{N}$

$$E_0' = \left(\cos\frac{\theta}{N}\right)^N E_0 \xrightarrow{N\to\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^4}\right)\right)^N$$

$$\approx 1 - N\frac{\theta^2}{2N^2} \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

5. Płytka fazowa $Q_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$Q_{\frac{\pi}{2}}$ - ćwierćfalówka $\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Q_{π} - półfalówka $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Co robią $Q_{\frac{\pi}{2}}, Q_\pi$

- ze stanem $|\leftrightarrow\rangle$: nic
- ze stanem $|\swarrow\!\nearrow\rangle$

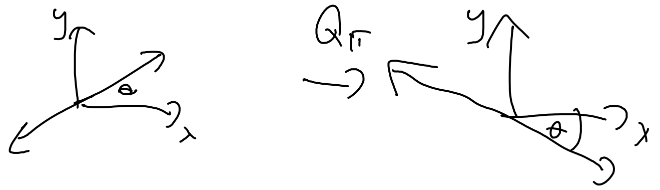
wszystko tak samo dla 1 fotonu i dla klasycznej fali

$$Q_{\frac{\pi}{2}}|\swarrow\!\nearrow\rangle = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = |\circlearrowleft\rangle$$

$$Q_{\pi}|\swarrow\!\nearrow\rangle = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = |\nwarrow\!\searrow\rangle$$

Co robi półfalówka ze stanem $|\theta\rangle = \cos\theta|\leftrightarrow\rangle + \sin\theta|\updownarrow\rangle$

$$Q_{\pi}|\theta\rangle = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} \overset{P}{=} \begin{bmatrix} \cos\theta \\ -\sin\theta \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) \\ \sin(-\theta) \end{pmatrix}$$



W związku z tym półfalówka obraca o kąt 2θ

Można ją wykorzystać do „obracania" liniowej polaryzacji

6. Napisz macierz Jonesa półfalówki obróconej o kąt θ

$$Q_{\pi}^{\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \overset{P}{=} \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$ (obrót o 2θ + półfalówka)

7. Porównaj co robi ze stanem $|\leftrightarrow\rangle$ układ

a) $|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow \boxed{Q_{\pi}^{\theta=22,5^\circ}} - \boxed{Q_{\frac{\pi}{4}}}$

b) $|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow \boxed{Q_{\frac{\pi}{4}}} - \boxed{Q_{\pi}^{\theta=22,5^\circ}}$

Kolejność ma znaczenie!

a) $$|\psi_{out}\rangle = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = |\circlearrowleft\rangle$$

b) $$|\psi_{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \overset{P}{=} |\nearrow\rangle$$

8. Foton o polaryzacji θ_1 pada na polaryzator ustawiony pod kątem θ_2. Jakie jest ...

wtowiony pod kątem θ_2. Jakie jest pr. przejścia

$$P_{\theta_1}|\theta_2\rangle = \begin{pmatrix} \cos^2\theta_1 & \cos\theta_1\sin\theta_1 \\ \cos\theta_1\sin\theta_1 & \sin^2\theta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta_2 \\ \sin\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_1\sin\theta_2 \\ \cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

pr. przejścia = fragment energii fali przechodzi dla kolejnej wiązki

$$P = (\cos^2\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_1\sin\theta_2)^2 + (\cos\theta_1\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin\theta_2)^2$$

$$= \cos^4\theta_1\cos^2\theta_2 + \cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\cos^3\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$+ \cos^2\theta_1\sin^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^4\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\sin^3\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_2$$

$$= \cos^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_1\sin^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2\sin\theta_1\sin\theta_2$$

$$= \cos^2(\theta_1 - \theta_2)$$