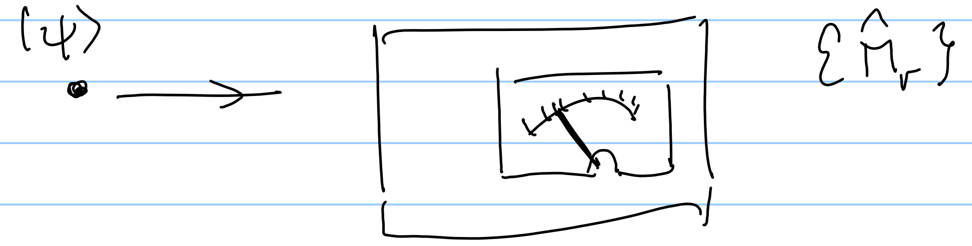
INFORMACJA KWANTOWA 1/2 – WYKŁAD 6

Pomiar kwantowy:



Elementarny wykład – przykład: dwa detektory.

Prawdopodobieństwo otrzymania wyniku r

$$p_r = \langle\psi|\hat{M}_r|\psi\rangle$$

Chcemy porównać z doświadczeniem. Potrzebujemy mieć przygotowany zespół układów kwantowych w tym samym stanie $|\psi\rangle$, dla każdego dokonujemy wyniku. Dla N kopii n_1 otrzymaliśmy $r=1$, itd. No to oczekujemy, że

$$p_r \approx \frac{n_r}{N}$$

z dokładnością do niepewności statystycznej.

Jeśli tak jest, to OK wierzymy.

Ale teraz przypuśćmy, że ktoś nam zrobił psikusa i w zespole statystycznym układy są przygotowane w różnych stanach.

Z prawdopodobieństwem w_1 w stanie $|\psi^{(1)}\rangle$

w_2 w stanie $|\psi^{(2)}\rangle$

itd. . . . .

I nie mamy określonego pojęcia który układ w którym stanie.

Prawdopodobieństwo otrzymania wyniku r będzie dane wzorem

$$p_r = \sum_i w_i \langle \psi^{(i)} | \hat{M}_r | \psi^{(i)} \rangle$$

To jest strasznie niewygodny sposób zapisu stanu zespołu statystycznego. Czy możemy go uprościć?

Przypomnijmy, że

$$\langle \psi^{(i)} | \hat{M}_r | \psi^{(i)} \rangle = \mathrm{Tr} \left(| \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \hat{M}_r \right)$$

W takim razie:

$$p_r = \sum_i w_i \mathrm{Tr} \left(| \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \hat{M}_r \right)$$

$$= \mathrm{Tr} \left[\underbrace{\left(\sum_i w_i | \psi^{(i)} \rangle \langle \psi^{(i)} | \right)}_{\hat{\rho}} \hat{M}_r \right]$$

OPERATOR GĘSTOŚCI – zawiera całą informację potrzebną do przewidzenia wyników pomiarów.

$$p_r = \mathrm{Tr} \left(\hat{\rho} \hat{M}_r \right)$$

To jest duże uproszczenie. Znając zespół $\{(p_i, |\psi^{(i)}\rangle)\}$ możemy obliczyć $\hat{\rho}$.

Ale rozkład $\hat{\rho}$ nie jest jednoznaczny.

Przykład:

$$\frac{1}{2}|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + \frac{1}{2}|\updownarrow\rangle\langle\updownarrow| = \frac{1}{2}|\nearrow\rangle\langle\nearrow| + \frac{1}{2}|\searrow\rangle\langle\searrow| = \frac{1}{2}\hat{1}$$

Nie jesteśmy w stanie odróżnić, czy ktoś nam przygotował rozkład stanów z $\leftrightarrow$ i $\updownarrow$ czy z $\searrow$ i $\nearrow$ z jednakowymi prawdopodobieństwami!

Operator gęstości ma pewne własności:

1) $\hat{\rho} = \hat{\rho}^{\dagger}$ – hermitowski
2) $\mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = 1$
3) $\hat{\rho} \geq 0$

dowolny dodatnio określony.

W ogólnym przypadku, jeżeli $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ mówimy, że mamy do czynienia ze STANEM CZYSTYM. Jeśli $\hat{\rho}$ nie da się zapisać w postaci operatora rzutowego, to jest to STAN MIESZANY

Jak poznać, czy $\hat{\rho}$ opisuje stan czysty, czy mieszany? Zawsze możemy rozłożyć na wektory własne: rozkład widmowy:

$$\hat{\rho} = \sum_j \lambda_j |u_j\rangle\langle u_j|$$

$\lambda_j \geq 0$ (bo $\hat{\rho}$ jest dodatni), $\lambda_j \leq 1$ (bo $1 = \mathrm{Tr}\,\hat{\rho} = \sum_j \lambda_j$)

W takim razie:

$$\mathrm{Tr}\,\hat{\rho}^2 = \sum_j \lambda_j^2 \le \Big(\sum_j \lambda_j\Big)^2 = 1$$

Znak równości $\Leftrightarrow$ dla pewnego k mamy $\lambda_k = 1$ i pozostałe $\lambda_j = 0$

Czyli
$$\hat{\rho} = |u_k\rangle\langle u_k|$$

[Uwaga: dowód działa dla przestrzeni $\mathbb{C}^d$ dodać fizycznie zajmiemy się do tej pory $d=2$]

Wróćmy na chwilę do sfery Blocha:

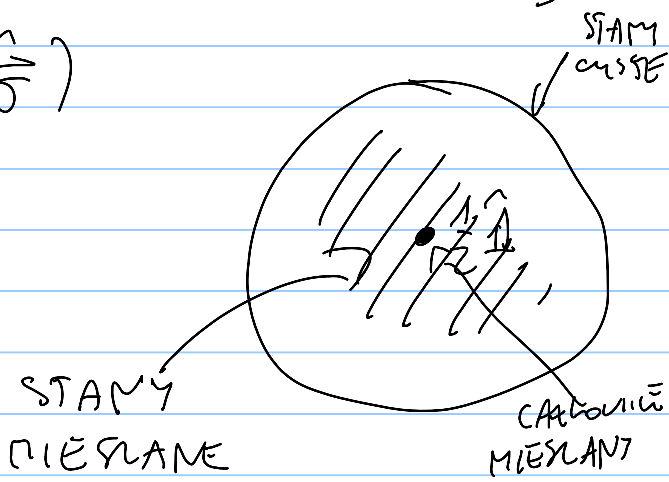
$$|\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| = \frac{1}{2}\left(\mathbb{1} + \vec{s}^{(i)}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\right)$$

W takim razie:

$$\hat{\rho} = \sum_i w_i |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}| = \frac{1}{2}\Big(\hat{\mathbb{1}} + \underbrace{\Big(\sum_i w_i \vec{s}^{(i)}\Big)}_{=\vec{s}}\cdot\hat{\vec{\sigma}}\Big)$$

$= \vec{s}$ ~ WEKTOR BLOCHA ODPOWIADAJĄCY $\hat{\rho}$

Oczywiście $\vec{s} = \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho}\,\hat{\vec{\sigma}}\right)$ tak jak to było dla stanów czystych.



Zmieniamy biegi. Gra:

ALICJA BOB

W pewnej chwili czasu Alicja i Bob dostają po jednym z dwóch pytań z jedn. prawdopodobieństwem: Alicja: A_1 lub A_2 Bob: B_1 lub B_2. Na otrzymane pytanie muszą odpowiedzieć natychmiast tak lub nie. Są tak daleko od siebie, że nie mogą czasem dowiedzieć się, które pytanie otrzymała druga osoba.

Tabelka wypłat:

	TAK - TAK NIE - NIE	TAK - NIE NIE - TAK
A_1 & B_1	+4€	−4€
A_1 & B_2	+4€	−4€
A_2 & B_1	+4€	−4€
A_2 & B_2	−4€	+4€

Alicja i Bob mogą ustalić strategię przed grą.

Twierdzenie Bella:

$$-2€ \leq \text{ŚREDNI ZYSK} \leq 2€$$

Dowód: Niech $a_1, a_2 = \pm 1$ będą odpowiedziami przygotowanymi przez Alicję na pytania A_1 i A_2 w danej rundzie. $+1$ = TAK, -1 = NIE. Tak samo Bob.
Zysk dla tego ruchu wynosi (po uśrednieniu po możliwych rodzajach pytań):

$$a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_2 b_2$$

$$= \underbrace{a_1(b_1 + b_2)} + \underbrace{a_2(b_1 - b_2)}$$

Jeden z dwu iloczynów jest równy zeru zależnie od tego czy $b_1 = -b_2$ czy $b_1 = +b_2$. A drugi jest zawarty pomiędzy -2 oraz 2.

∎

Zróbmy następujące doświadczenie. Przygotujmy parę fotonów, jeden z nich wysyłamy do Alicji, drugi do Boba.

Jak opisywać taką parę fotonów? Załóżmy, że one są rozróżnialne. Ma sens następujący zapis: $|\leftrightarrow\rangle_A |\updownarrow\rangle_B$ (wysyłamy foton spolaryzowany poziomo do Alicji, pionowo do Boba). Albo $|\updownarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B$ – na odwrót.

Uwaga matematyczna: to co robimy, to bierzemy ILOCZYN TENSOROWY przestrzeni liniowych opisujących każdy z fotonów. Fizycy często omijają znak "$\otimes$" tam gdzie nie prowadzi to do nieporozumień.

W mechanice kwantowej wolno nam brać superpozycje. Rozważmy stan

$$|\Psi_-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle_A |\updownarrow\rangle_B - |\updownarrow\rangle_A |\leftrightarrow\rangle_B\right)$$

Superpozycja dwóch rozróżnialnych stanów, Przypuśćmy, że Alicja ustawiła polaryzator pod kątem $\frac{\theta_a}{2}$, Bob pod kątem $\frac{\theta_b}{2}$.

Dla pojedynczego fotonu prawdopodobieństwo tego, że foton przejdzie jest dane przez $|\langle\theta_a|\psi\rangle|^2$, gdzie

$$|\theta_a\rangle = \cos\frac{\theta_a}{2}|\leftrightarrow\rangle + \sin\frac{\theta_a}{2}|\updownarrow\rangle$$

Tak samo u Boba.
To, co byśmy chcieli policzyć, to

$$p(\theta_a, \theta_b) = \left|\left({}_A\langle\theta_a|\, {}_B\langle\theta_b|\right)|\Psi_-\rangle_{AB}\right|^2$$

No to liczymy:

$${}_A\langle\theta_a|\, {}_B\langle\theta_b| = \cos\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\langle\leftrightarrow|\langle\leftrightarrow| + \cos\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2}\langle\leftrightarrow|\langle\updownarrow| + \sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\langle\updownarrow|\langle\leftrightarrow| + \sin\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2}\langle\updownarrow|\langle\updownarrow|$$

Mamy teraz liczyć iloczyny skalarne, bo składamy wektory Alicji osobno i wektory Boba osobno. W takim razie:

$$\left({}_A\langle\theta_a| \, {}_B\langle\theta_b| \Psi_-\rangle \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta_a}{2}\sin\frac{\theta_b}{2} - \sin\frac{\theta_a}{2}\cos\frac{\theta_b}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta_b-\theta_a}{2}$$

Prawdopodobieństwo:

$$p(\theta_a,\theta_b) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta_b-\theta_a}{2} = \frac{1}{4}\left[1-\cos(\theta_b-\theta_a)\right]$$

Opiszmy teraz możliwe wyniki doświadczenia, oraz odpowiadające im prawdopodobieństwa tych pomiarów:

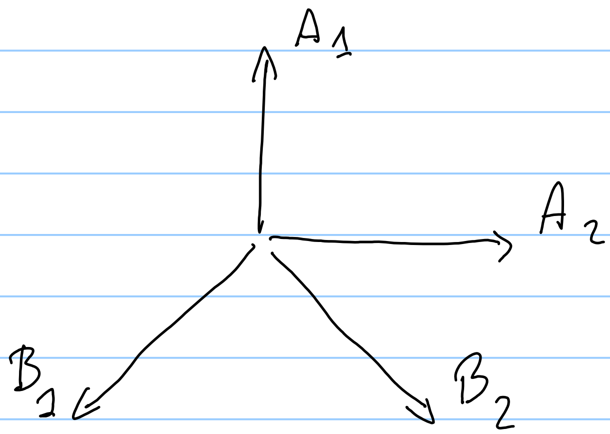
A	B	
przeszedł	przeszedł	$p(\theta_a,\theta_b)$
przeszedł	odbił się	$p(\theta_a,\theta_b+\pi)$
odbił się	przeszedł	$p(\theta_a+\pi,\theta_b)$
odbił się	odbił się	$p(\theta_a+\pi,\theta_b+\pi)$

Pomysł: niech Alicja i Bob odpowiadają TAK jeśli foton przeszedł, NIE jeśli foton się odbił. Jeśli Alicja i Bob są nagradzani za udzielenie identycznej odpowiedzi, to dla ustalonych orientacji polaryzatorów wynik to 4€ pomnożone przez:

$$C(\theta_a,\theta_b) = p(\theta_a,\theta_b) - p(\theta_a+\pi,\theta_b) - p(\theta_a,\theta_b+\pi)$$

$$+ p(\theta_a+\pi,\theta_b+\pi) = -\cos(\theta_b-\theta_a)$$

Strategia: w zależności od otrzymanych pytań Alicja i Bob ustawiają:



$\theta_{A_1} = 0^\circ$ $\theta_{B_1} = 225^\circ$

$\theta_{A_2} = 90^\circ$ $\theta_{B_2} = 135^\circ$

Łatwo policzyć, że

$$C(\theta_{A_1}, \theta_{B_1}) + C(\theta_{A_1}, \theta_{B_2}) + C(\theta_{A_2}, B_1) - C(\theta_{A_2}, \theta_{B_2}) = 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

To jest BARDZO FUNDAMENTALNY WYNIK: OZNACZA ON, ŻE WYNIKI POMIARÓW POLARYZACJI NIE MOGŁY BYĆ WCZEŚNIEJ OKREŚLONE Z GÓRY!