Wyklad8
3 kwietnia 2011
22:07

1. Zredukowana macierz gęstości

Wiemy że macierz gęstości używamy gdy mamy niepełną informację o układzie:

$$\rho = \sum_i w_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \qquad \left(\text{stan } |\psi_i\rangle \text{ z prawdopodobieństwem } w_i\right)$$

np. jeśli $|\psi\rangle = \psi_0|0\rangle + \psi_1|1\rangle = \begin{bmatrix}\psi_0\\ \psi_1\end{bmatrix}$ (qubit)

to ogólnie $\rho = \sum_{i,j=0}^{1} \rho^i_j |i\rangle\langle j| = \begin{bmatrix}\rho^0_0 & \rho^0_1\\ \rho^1_0 & \rho^1_1\end{bmatrix}$

I prawdopodobieństwa pomiarów liczymy

$$p_k = Tr(\rho M_k)$$

• Rozważmy teraz dwa podukłady:

Baza w A $|0\rangle, |1\rangle$ $(|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle)$ Baza w B $|0\rangle, |1\rangle$

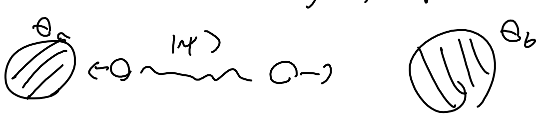
Ogólny stan czysty $|\psi\rangle_{AB} = \sum_{i_A=0}^{1}\sum_{i_B=0}^{1} \psi_{i_A i_B} |i_A\rangle\otimes|i_B\rangle = \begin{bmatrix}\psi_{00}\\ \psi_{01}\\ \psi_{10}\\ \psi_{11}\end{bmatrix}$

Ogólny stan mieszany:

$$\rho_{AB} = \sum_{\substack{i_A, j_A\\ i_B, j_B}} \rho^{i_A i_B}_{j_A j_B} |i_A\rangle\langle j_A| \otimes |i_B\rangle\langle j_B| =$$

$$= \begin{bmatrix}\rho^{00}_{00} & \rho^{00}_{01} & \rho^{00}_{10} & \rho^{00}_{11}\\ \rho^{01}_{00} & \rho^{01}_{01} & \rho^{01}_{10} & \rho^{01}_{11}\\ \rho^{10}_{00} & \rho^{10}_{01} & \rho^{10}_{10} & \rho^{10}_{11}\\ \rho^{11}_{00} & \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} & \rho^{11}_{11}\end{bmatrix}$$

• Pomiary lokalne: A wykonuje pomiar lokalny $(\{M^A_k\})$
B wykonuje pomiar lokalny $(\{M^B_l\})$



Wiemy że jeśli 2 fotony są mierzone dwoma polaryzatorami ustawionymi pod kątami θ_a, θ_b to prawdop. przejścia $= |\langle\psi|(|\theta_a\rangle\otimes|\theta_b\rangle)|^2$

Piszemy inaczej:

$$\langle\psi|\, |\theta_a\rangle\otimes|\theta_b\rangle \langle\theta_a|\otimes\langle\theta_b|\, |\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi|\, |\theta_a\rangle\langle\theta_a| \otimes |\theta_b\rangle\langle\theta_b|\, |\psi\rangle =$$

$$= \langle\psi| \left(|\theta_a\rangle\langle\theta_a| \otimes |\theta_b\rangle\langle\theta_b|\right) |\psi\rangle =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(|\psi\rangle\langle\psi| \;\; |\theta_a\rangle\langle\theta_a| \otimes |\theta_b\rangle\langle\theta_b| \right)$$

Czyli ogólnie prawdopodobieństwo że A wyjdzie k a B wyjdzie l

$$p_{kl} = \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB} \; M_k^A \otimes M_l^B \right)$$

{ Łatwo zauważyć że jeśli $\rho_{AB} = |\psi_A\rangle\langle\psi_A| \otimes |\psi_B\rangle\langle\psi_B|$

$p_{kl} = \langle\psi_A|M_k^A|\psi_A\rangle \cdot \langle\psi_B|M_l^B|\psi_B\rangle = p_k \cdot p_l$

- Opis podukładu.

Załóżmy że posiadamy A i nie mamy dostępu do cząstki B. Jak opiszemy stan cząstki A ?

Stan = Informacja pozwalająca liczyć prawdopodobieństwa wyników pomiarowych

Skoro nie mamy dostępu do B to możemy poznać jedynie wyniki pomiarów na A. Jeśli nawet ktoś coś zmierzył na B my nie znamy tych wyników !

Innymi słowy mamy dostępne są tylko

$$p_k = \sum_l p_{kl}$$ } prawdopodobieństwa marginalne

$$p_k = \sum_l \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB} \, M_k^A \otimes M_l^B \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB} \; M_k^A \otimes \underbrace{\sum M_l^B}_{\mathbb{1}} \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_{AB} \; M_k^A \otimes \mathbb{1}_B \right) =$$

$$= \sum_{i_A, i_B} \langle i_A| \otimes \langle i_B| \; \rho_{AB} \; M_k^A \otimes \mathbb{1}_B \; |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle =$$

$$= \sum_{i_A i_B} \langle i_A| \otimes \langle i_B| \; \rho_{AB} \cdot M_k^A \otimes \mathbb{1} \; |i_A\rangle \otimes |i_B\rangle$$

$$= \sum_{i_A} \langle i_A | \Big(\underbrace{\sum_{i_B} \langle i_B | \rho_{AB} | i_B \rangle}_{\rho_A} \cdot M_k^A \Big) | i_A \rangle =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_A M_k^A \right)$$

$$\rho_A = \sum_{i_B} \langle i_B | \rho_{AB} | i_B \rangle = \mathrm{Tr}_B \left(\rho_{AB} \right)$$ ← częściowy ślad

↑ zredukowana macierz gęstości.

Reprezentuje wszystko to czego możemy dowiedzieć się lokalnie.

Jak liczyć częściowy ślad

$$\rho_{AB} = \left[\begin{array}{cc|cc} \rho^{00}_{00} & \rho^{00}_{01} & \rho^{00}_{10} & \rho^{00}_{11} \\ \rho^{01}_{00} & \rho^{01}_{01} & \rho^{01}_{10} & \rho^{01}_{11} \\ \hline \rho^{10}_{00} & \rho^{10}_{01} & \rho^{10}_{10} & \rho^{10}_{11} \\ \rho^{11}_{00} & \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} & \rho^{11}_{11} \end{array}\right]$$

$$\rho_A = \left[\begin{array}{c|c} \rho^{00}_{00} + \rho^{01}_{01} & \rho^{00}_{10} + \rho^{01}_{11} \\ \hline \rho^{10}_{00} + \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} + \rho^{11}_{11} \end{array}\right]$$

Zauważmy uwagę, że ρ_A nie zależy od rodzaju pomiaru jaki moglibyśmy wykonać B. Mamy $\sum_l M_l^B = \mathbb{1}$. (W szczególności $M^B = \mathbb{1}$, brak pomiaru). Czyli to jaki zdecydujemy się wykonywać pomiar B np. M_l^B czy $M_l^{B'}$ nie wpływa na prawdopodobieństwo wyników A.

(Uważaj dla konkretnego wyniku pomiaru B stan który wg B znajduje się u A zależy od tego wyniku)

Przykład

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|01\rangle - |10\rangle \right)$$

Obliczmy ρ_A:

$$|\psi^-\rangle\langle\psi^-| = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 1 & -1 & \\ & -1 & 1 & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \rho_A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↑ stan max mieszany

(zdepolaryzowany)

Stan całości całkowicie znamy, stan podukładu nie znamy zupełnie — czegoś takiego nie ma klasycznie

Przykład: Wyjątkowe własności singletu

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\leftrightarrow\rangle|\updownarrow\rangle - |\updownarrow\rangle|\leftrightarrow\rangle\right)$$

A mierzy w bazie $|\leftrightarrow\rangle, |\updownarrow\rangle$: B

$$|\leftrightarrow\rangle \longrightarrow |\updownarrow\rangle$$

$$|\updownarrow\rangle \longrightarrow |\leftrightarrow\rangle$$

Ale zauważmy, że

$$|\psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\nearrow\rangle|\searrow\rangle - |\searrow\rangle|\nearrow\rangle\right)$$

więc to samo w innej bazie.

Czyli A swoim pomiarem wybiera bazę u B. Ale to nie pozwala na przesłanie informacji:

$$\frac{1}{2}\left(|\leftrightarrow\rangle\langle\leftrightarrow| + |\updownarrow\rangle\langle\updownarrow|\right) = \frac{1}{2}\left(|\nearrow\rangle\langle\nearrow| + |\searrow\rangle\langle\searrow|\right) = \frac{1}{2}I$$

Czy w takim razie to w ogóle do czegoś może się przydać?

2. Teleportacja

Wiemy, że dysponując jedną kopią stanu kwantowego nie możemy poznać tego stanu — stany nieortogonalne nierozróżnialne. Np. różne stany polaryzacyjne.

Mamy problem gdybyśmy chcieli gdzieś odtworzyć wiernie stan kwantowy jakiegoś układu — np. teleportować człowieka: dokładnie poznać stan wszystkich atomów, przesłać tą informację w jakiejś postaci i gdzie w innym miejscu z tej informacji zrekonstruować całą strukturę.

Mamy tu związek z zasadą nieoznaczoności Heisenberga, nie da się zmierzyć (ani zdefiniować) jednocześnie położenia i pędu cząstki z dowolną dokładnością.

W Star-Treku istnieją urządzenia zwane kompensatorami

Heisenberga, które powodują pobudzenie cząstki i zaburzają nieodwracalnie stan kwantowy układu.
W roku 1993 Frycz uświadomił sobie że kompromisy jednak nie są potrzebne!

A mamy stan qubitu $|\varphi\rangle$ B

Chcemy go „przenieść" do B ale nie przenosząc fizycznie.
Jest to możliwe jeśli A i B mają stan splątany (singlet $|\psi^-\rangle$)

A $|\varphi\rangle$ ① ② — teleport — ③ B, $|\psi^-\rangle$

Dodatkowo założymy że A i B mogą komunikować się klasycznie (telefon)

Idea:

A ① ② → ① ② A wykonuje pełen szczegółowy pomiar, na cząstkach ①, ②

Dzięki temu że cząstki ② i ③ były splątane stan ③ zmienia się w wyniku pomiaru.
Jeśli pomiar został wybrany właściwie stan ③ może zmienić się w teleportowany stan $|\varphi\rangle$ cząstki ①, (lub w miarę znany stan $|\varphi\rangle$.)
Jednocześnie w wyniku pomiaru, splątane stają się cząstki ①, ②, splątanie między 2 i 3 ginie, podobnie jak stan $|\varphi\rangle$ cząstki ①.

Szczegóły:

$$|\varphi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$$

$$|\varphi\rangle \otimes |\psi_-\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(a|001\rangle - a|010\rangle + b|101\rangle - b|110\rangle)$$

We can rewrite this state in a different form

$$= \frac{1}{2}\Big[-|\psi_-\rangle \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle) - |\psi_+\rangle \otimes (a|0\rangle - b|1\rangle)$$
$$+ |\varphi_-\rangle \otimes (a|1\rangle + b|0\rangle) + |\varphi_+\rangle \otimes (a|1\rangle - b|0\rangle)\Big]$$

Check

$$\frac{1}{2}\Big[-(|01\rangle - |10\rangle) \otimes (a|0\rangle + b|1\rangle)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[-\left(|01\rangle-|10\rangle\right)\otimes\left(a|0\rangle+b|1\rangle\right)$$
$$-\left(|01\rangle+|10\rangle\right)\otimes\left(a|0\rangle-b|1\rangle\right)$$
$$+\left(|00\rangle-|11\rangle\right)\otimes\left(a|1\rangle+b|0\rangle\right)$$
$$+\left(|00\rangle+|11\rangle\right)\otimes\left(a|1\rangle-b|0\rangle\right)\Big]=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(-2a|010\rangle-\cancel{b|011\rangle}+\cancel{b|011\rangle}+\cancel{a|100\rangle}-\cancel{a|100\rangle}$$
$$+2b|101\rangle+2a|001\rangle+\cancel{b|000\rangle}-\cancel{b|000\rangle}$$
$$-\cancel{a|111\rangle}+\cancel{a|111\rangle}-2b|110\rangle\Big)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a|001\rangle-a|010\rangle+b|101\rangle-b|110\rangle\right)$$

We perform a measurement on qubits 1 & 2 in the Bell basis & if we measure:

Measurement of A		State of B
$\|\psi_-\rangle$		$a\|0\rangle+b\|1\rangle =: \|\varphi\rangle$
$\|\psi_+\rangle$	$\Rightarrow$	$a\|0\rangle-b\|1\rangle = \|\varphi_1\rangle$
$\|\varphi_-\rangle$		$a\|1\rangle+b\|0\rangle = \|\varphi_2\rangle$
$\|\varphi_+\rangle$		$a\|1\rangle-b\|0\rangle = \|\varphi_3\rangle$

A tells B which measurement result she obtained. Can B correct his state?

φ:
- $|\psi_-\rangle$, B does nothing.
- $|\psi_+\rangle$, B applies unitary operation $\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}1 & \\ & -1\end{bmatrix}\left(a|0\rangle-b|1\rangle\right)=a|0\rangle+b|1\rangle=|\varphi\rangle$$

Co to jest za operacja: $a|\leftrightarrow\rangle+b|\updownarrow\rangle \to a|\leftrightarrow\rangle+be^{i\pi}|\updownarrow\rangle$
fizycznie

opóźnia fazę polaryzacji o π wzgl. drugiej (półfalówka)

- $|\varphi_-\rangle$, B applies $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\left(a|1\rangle+b|0\rangle\right)=|\varphi\rangle$

$a|\leftrightarrow\rangle + b|\updownarrow\rangle \to a|\updownarrow\rangle + b|\leftrightarrow\rangle$

Obrót polaryzacji .... Jak ?
Można połowicznie, ale tylko jedną, a przy tym ze stratami

$(a|0\rangle - b|1\rangle)$

półfalówka pod kątem 45° $\Big\}$ $(a|0\rangle + b|1\rangle)$ $\to$

$\sim |\psi_+\rangle$ B applies $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}(a|1\rangle - b|0\rangle) = |\psi\rangle$

opóźnienie łącza + obrót.

Telepartation is finished.

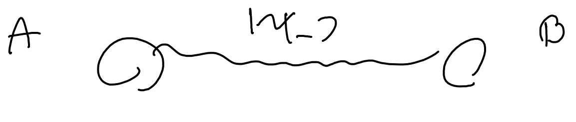
Remarks:

- neither A nor B knows the state
- state is destroyed at A (no-cloning)
- until communication from A, B state is a mixture of four states

$$\rho = \frac{1}{4}\left(|\psi\rangle\langle\psi| + |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + |\psi_2\rangle\langle\psi_2| + |\psi_3\rangle\langle\psi_3|\right) = \mathbb{1}$$

- no superluminal communication, although very strange.

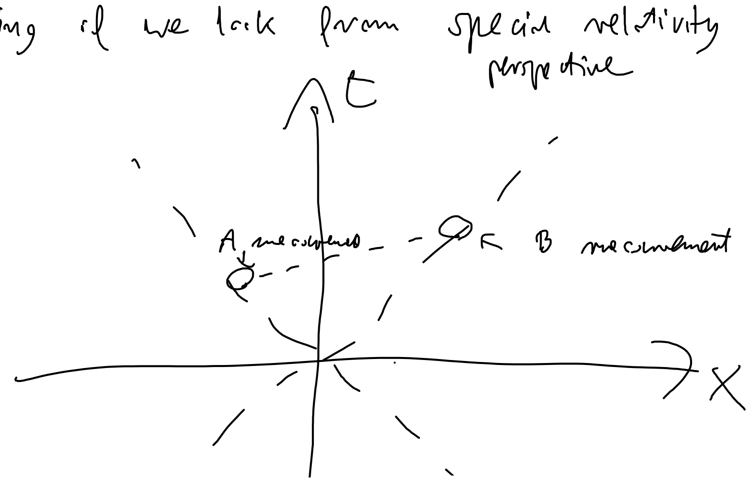
Who collapses the wave function ?

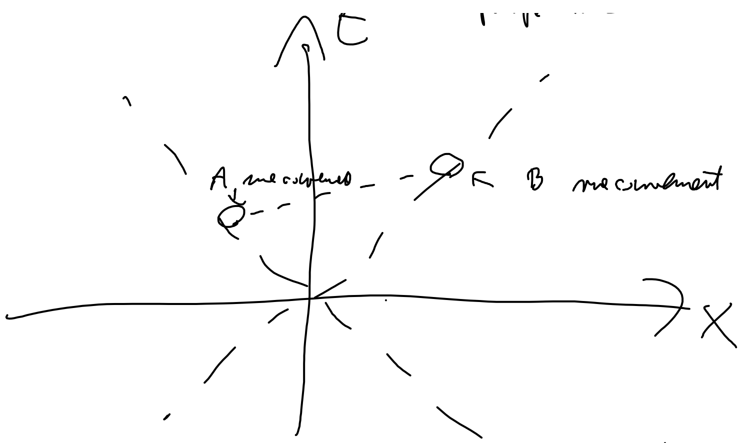


if A measures $|0\rangle$ $\longrightarrow$ B result is determined to be $|1\rangle$

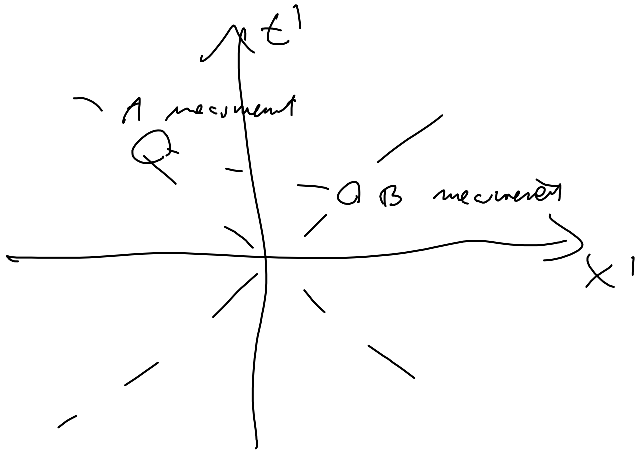
we could say that measurement of A collapsed the wave function and determined the result of B

Interesting if we look from special relativity perspective





If event are space-like separated, there is another inertial frame in which



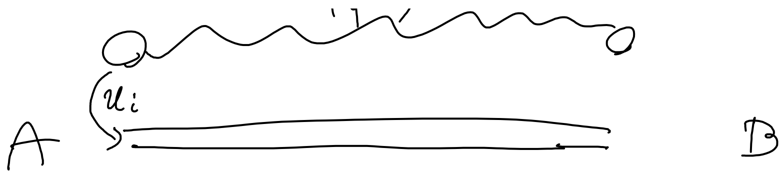
So it is B that caused the collapse of the wave function and A result was determined by B results..

So only if A, B measurements are time-like separated we may say who collapsed the wave function.

3. Gęste kodowanie

wiemy że mając idealny kanał kwantowy i przesyłając jeden qubit możemy przekazać jedynie 1 bit informacji.

A co jeśli przed przesłaniem qubitu, A i B mają stan splątany...



„Mogę odwrócić protokół teleportacji.... "

(w teleportacji: 2 bity + 1 ebit → przesłanie 1 qubitu
tutaj 1 qubit + 1 ebit → przesłanie 2 bitów)

A wykonuje na swoim qubicie jedną z
4 operacji: $\mathbb{1}$, σ_x, σ_y, σ_z i przesyła
swój qubit do B. B otrzymuje:

$|\psi^-\rangle$

$|\phi^-\rangle$

$|\phi^+\rangle$

$|\psi^+\rangle$

i może je rozróżnić pomiarem Bella
Można powiedzieć że posiadanie wspólnego stanu
splątanego jest zasobem prowadzącym do
efektywniejszej komunikacji !