Wyklad1

1 kwietnia 2011
10:21

1. Paradoks EPR (Einstein, Podolsky, Rosen 1935)
Celem było wykazanie niekompletności mechaniki kwantowej. Czyli że można opisać stan układu lepiej niż za pomocą funkcji falowej

① ②

Mamy dwie cząstki. Z każdą związane są operatory:

$\hat{q}_1, \hat{p}_1$ i $\hat{q}_2, \hat{p}_2$ $\quad [\hat{q}_i, \hat{p}_i] = i\hbar$

Wiadomo, że w związku z niekomutowaniem $\hat{q}_i, \hat{p}_i$ nie istnieje stan mający dobrze określone jednocześnie p i q. Zauważ jednak, że

$$\hat{\delta q} = \hat{q}_2 - \hat{q}_1, \quad \hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2, \quad [\hat{\delta q}, \hat{P}] = 0$$

Czyli względne położenie i całkowity pęd komutują!
Napiszmy stan dla którego będzie stanem własnym $\hat{\delta q}$ i $\hat{P}$

$$\hat{\delta q}\,|\psi_{12}\rangle = \delta q\,|\psi_{12}\rangle \qquad \hat{P}\,|\psi_{12}\rangle = P\,|\psi_{12}\rangle$$

$|q\rangle$ - stan o określonym położeniu

$|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int dq\, e^{\frac{iqp}{\hbar}}|q\rangle$ - stan o określonym pędzie p

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int dq_1\, dq_2\, |q_1, q_2\rangle \cdot e^{\frac{ip_1 q_1}{\hbar}}\, e^{\frac{i(P-p_1)q_2}{\hbar}}\, \delta(q_2 - q_1 - \delta q) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int dq_1\, |q_1, q_1 + \delta q\rangle\, e^{ip_1\delta q}\, e^{iP(q_1 + \delta q)} =$$

$$= \underbrace{e^{ip_1\delta q}\, e^{iP\delta q}}_{\text{globalna faza}} \cdot \frac{1}{2\pi}\int dq\, |q, q+\delta q\rangle\, e^{iPq}$$

$$\psi(q_1,q_2) = e^{\frac{i p_1 q_1}{\hbar}}\, e^{\frac{i(P-p_1)q_2}{\hbar}} \int e^{ik(q_2-q_1-s_q)}\, dk$$

Ten stan jest nie fizyczny ale zawsze można go dowolnie przybliżyć dobrymi stanami Gaussowskimi (zadanie domowe)

Dla uproszczenia przyjmijmy $P=0$ (pędy zawsze przeciwne)

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{2\pi}\int dq\, |q, q+s_q\rangle$$

Założenia EPR jakie powinna spełniać kompletna teoria:

- Każdy element „fizycznej rzeczywistości" musi mieć odpowiednik w teorii
- Jeśli w pewnych okolicznościach potrafimy bez żadnego zaburzenia układu przewidzieć z prawdopodobieństwem 1 wartości wielkości fizycznej tzn. że istnieje element „fizycznej rzeczywistości" odpowiadający tej wielkości fizycznej.

Niech te dwie cząstki będą daleko od siebie

A $\qquad |\psi_{EPR}\rangle \qquad$ B

① $\qquad\qquad$ ②

A może zdecydować się na wykonanie albo pomiar

... można zmierzyć ... położenie ... pęd
$\hat{q}_1$ albo $\hat{p}_1$.

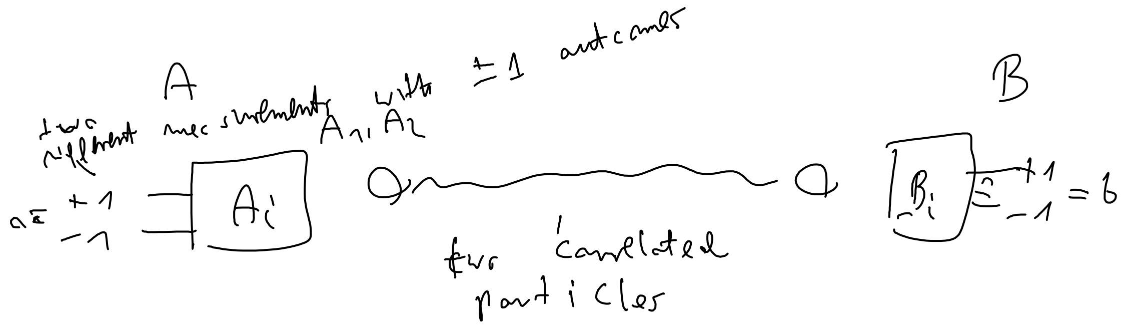
- jeśli zmierzę $\hat{q}_1$ i uzyskam wynik q_1 to wiem na 100% powiedzieć że cząstka 2 ma położenie $q_2 = q_1 + \delta q$
  Ale pomiar $\hat{q}_1$ wykonany na cząstce 1 nie mógł zaburzyć cząstki 2 bo one mogą być daleko daleko.
  Wniosek cząstka 2 musiała już mieć wcześniej określone położenie q_2 (el. fizycznej rzeczywistości)
- jeśli zmierzę $\hat{p}_1$ i uzyskam wynik p_1 wiem że $p_2 = -p_1$ itd...

Oznacza że położenie i pęd cząstki 2 są elementami fizycznej rzeczywistości, a opis przy pomocy f. falowej nie to nie pozwala $\Rightarrow$ opis f. falowa jest niekompletny.
Może istnieje głębsza teoria (parametry ukryte) w której położenie i pędy są zawsze określone (a tylko nasza wiedza jest niepełna ...)

2. Nierówności Bella (1964)
Hot debate:
How do we know that entangled states are not just some hidden classical correlations?
and that the measurement just reveals this state

and that the measurement just reveals this state.

Is there a simple experimental proof of this



A and B each randomly chooses to perform one of two measurements.

We assume that there is some parameter λ that determines how particles will behave in the particular measurement

$$a_i = a(A_i, \lambda) = \pm 1 \qquad b_i = b(B_i, \lambda) = \pm 1$$

correlations in measurement of A and B are due classical correlation imprinted during preparation

Consider a quantity:

$$C = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_1 - a_2 b_2 =$$
$$= a_1(b_1 + b_2) + a_2(b_1 - b_2)$$

for every combination of ± 1 $\quad |C| \leq 2$

$$\langle C \rangle = \langle a_1 b_1 \rangle + \langle a_1 b_2 \rangle + \langle a_2 b_1 \rangle - \langle a_2 b_2 \rangle$$

$$\langle C \rangle = \int d\lambda\, p(\lambda) \Big(a(A_1, \lambda)\, b(B_1, \lambda) + a(A_1, \lambda)\, b(B_2, \lambda) + a(A_2, \lambda)\, b(B_1, \lambda) - a(A_2, \lambda)\, b(B_2, \lambda) \Big)$$

$$|\langle C \rangle| \leq 2$$

What are the assumptions:

- reality (measurements just reveal preexisting quantities $a(A_i, \lambda)$, $b(B_i, \lambda)$

– locality (measurements of A does not in depend and measurement of B; without locality we could have $a_i = a(A_i, B_j, \lambda)$)

Local realism.

Is Quantum Mechanics a local realistic theory?

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle \otimes |1\rangle - |1\rangle \otimes |0\rangle\right) \qquad \begin{cases} |0\rangle = |-\tfrac{1}{2}\rangle \\ |1\rangle = |+\tfrac{1}{2}\rangle \end{cases} \text{ spiny } \tfrac{1}{2}$$

$$\sigma_{\vec{n}} = \vec{\sigma} \circ \vec{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$$

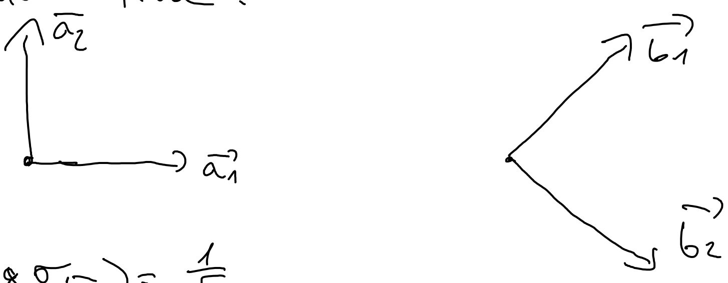
$$\sigma_{\vec{n}} = |\vec{n}\rangle\langle\vec{n}| - |\vec{n}^{\perp}\rangle\langle\vec{n}^{\perp}|$$ – observable with measurement results ± 1

$$\langle \sigma_{\vec{n}} \otimes \sigma_{\vec{n}'} \rangle = \langle \psi_- | \sigma_{\vec{n}} \otimes \sigma_{\vec{n}'} | \psi_- \rangle =$$

$$\left\{ \langle \psi_- | \sigma_i \otimes \sigma_j | \psi_- \rangle = -\delta_{ij} \right.$$

$$= -\vec{n} \circ \vec{n}'$$

Let us take:



$$\langle \sigma_{\vec{a}_1} \otimes \sigma_{\vec{b}_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \sigma_{\vec{a}_1} \otimes \sigma_{\vec{b}_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \sigma_{\vec{a}_2} \otimes \sigma_{\vec{b}_1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \sigma_{\vec{a}_2} \otimes \sigma_{\vec{b}_2} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|C| = |\langle \sigma_{a_1} \otimes \sigma_{b_1} \rangle + \langle \sigma_{a_1} \otimes \sigma_{b_2} \rangle + \langle \sigma_{a_2} \otimes \sigma_{b_1} \rangle - \langle \sigma_{a_2} \otimes \sigma_{b_2} \rangle|$$

$$= 2\sqrt{2} > 2$$

Nierówności Bella złamane.
trzeba odrzucić lokalność albo realizm?

Maksymalne łamanie nierówności Bella

(Tsirelson bound) [ćwiczenia]

(Tsirelson bound) [ćwiczenia]

Tw: $\langle\psi|\, \sigma_{a_1}\otimes\sigma_{b_1} + \sigma_{a_1}\otimes\sigma_{b_2} + \sigma_{a_2}\otimes\sigma_{b_1} - \sigma_{a_2}\otimes\sigma_{b_2} \,|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}$

Dla uproszczenia notacji oznaczmy $S_{a_i} := \sigma_{a_i}\otimes\mathbb{1}$

$S_{b_i} := \mathbb{1}\otimes\sigma_{b_i}$

Zauważmy że $[S_{a_i}, S_{b_j}] = 0$, oraz $S_{a_i}^\dagger = S_{a_i}$

$S_{b_i}^\dagger = S_{b_i}$

Dowód:

Chcemy dowieść:

$$\langle\psi|\underbrace{S_{a_1}\cdot S_{b_1} + S_{a_1}\cdot S_{b_2} + S_{a_2}\cdot S_{b_1} - S_{a_2}\cdot S_{b_2}}_{||}|\psi\rangle \leq 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(S_{a_1}^2 + S_{a_2}^2 + S_{b_1}^2 + S_{b_2}^2\right) - \frac{\sqrt{2}-1}{8}\cdot\Big[$$

$$\left[(\sqrt{2}+1)\left(S_{a_1} - S_{b_1}\right) + S_{a_2} - S_{b_2}\right]^2$$

$$+\left[(\sqrt{2}+1)\left(S_{a_1} - S_{b_2}\right) - S_{a_2} - S_{b_1}\right]^2$$

$$+\left[(\sqrt{2}+1)\left(S_{a_2} - S_{b_1}\right) + S_{a_1} + S_{b_2}\right]^2$$

$$+\left[(\sqrt{2}+1)\left(S_{a_2} + S_{b_2}\right) - S_{a_1} - S_{b_1}\right]^2 \Big]$$

Współczynnik przy $S_{a_i}^2$ i $S_{b_i}^2$

$\left(2\cdot(\sqrt{2}+1)^2 + 2\right)\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{8} = \left(6+4\sqrt{2}+2\right)\frac{\sqrt{2}-1}{8} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{2}-1 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ok

Współczynnik przy: $S_{a_1}S_{a_2}$ (uwaga $[S_{a_1}, S_{a_2}] \neq 0$)

$(\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1) + (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}+1) = 0$ ok

Współczynnik przy: $S_{a_1}S_{b_1}$ ($[S_{a_1}, S_{b_1}] = 0$)

$-\frac{\sqrt{2}-1}{8}\cdot\left(-(\sqrt{2}+1)^2\cdot 2 - 2(\sqrt{2}+1) - 2(\sqrt{2}+1) + 2\right) =$

$= \frac{\sqrt{2}-1}{8}\left(6+4\sqrt{2}+4\sqrt{2}+4-2\right) = (\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1) = 1$ ok.

Ostatnie 4 wyrazy mają postać $A_1^\dagger A_1 + A_2^\dagger A_2 + \dots$

(bo $S_{a_i}^\dagger = S_{a_i}$) więc $\langle\psi|A_i^\dagger A_i|\psi\rangle \geq 0$

Czyli mierzymy je pamięć i dostaniemy wielką wartość:

$$\langle\psi| S_{a_1}S_{b_1} + S_{a_1}S_{b_2} + S_{a_2}S_{b_1} - S_{a_2}S_{b_2} |\psi\rangle \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}} \langle\psi| S_{a_1}^2 + S_{a_2}^2 + S_{b_1}^2 + S_{b_2}^2 |\psi\rangle$$

$$\left\} \; S_{a_i}^2 = S_{b_i}^2 = \mathbb{1} \right.$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \qquad \blacksquare$$

Prostszy dowód $C = S_{a_1}S_{b_1} + S_{a_1}S_{b_2} + S_{a_2}S_{b_1} - S_{a_2}S_{b_2}$

$$\|C\| = \sup_{|\psi\rangle} \langle\psi| C |\psi\rangle$$

$$C^2 = 4 + S_{a_1}S_{a_2}(S_{b_1}+S_{b_2})(S_{b_1}-S_{b_2}) + S_{a_2}S_{a_1}(S_{b_1}-S_{b_2})(S_{b_1}+S_{b_2}) =$$

$$= 4 + [S_{a_1}, S_{a_2}] \cdot [S_{b_2}, S_{b_1}]$$

$$\|C^2\| \le 4 + \|[S_{a_1}, S_{a_2}]\| \, \|[S_{b_2}, S_{b_1}]\| \le 8$$

$$C^2 = C^\dagger C \qquad \|C^\dagger C\| = \|C\|^2$$

Czyli $\|C\|^2 \le 8$ $\quad \|C\| \le 2\sqrt{2}$ $\blacksquare$

Skorzystaliśmy z $\|A+B\| \le \|A\| + \|B\|$

$\|A \cdot B\| \le \|A\| \cdot \|B\|$

3. Stany splątane

- Były o stanach czystych:

$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ – stan niesplątany

$|\psi\rangle \neq |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle$ – stan splątany

Albo są korelacje albo nie ma to rozumiemy: istnieniem lub nieistnieniem splątania równoważne istnieniu lub nieistnieniu splątania

- Ogólniej sytuacja b. skomplikowana. Mamy zarówno korelacje klasyczne i kwantowe (splątanie)

Przykład: $\rho = \frac{1}{2}|00\rangle\langle 00| + \frac{1}{2}|11\rangle\langle 11|$

można przygotować z dwóch niezależnych podukładów jedynie przez klasyczną (telefon) komunikację i lokalne operacje kwantowe - Local Operations + Classical Communication (LOCC)

(w odróżnieniu od $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$: $|\psi\rangle\langle\psi|$)

Ogólnie:

Definicja Stan jest separowalny (klasycznie skorelowany) jeśli da się zapisać jako:

$$\rho_{AB} = \sum_i p_i \rho_i^A \otimes \rho_i^B \qquad p_i \geq 0 \ !$$

{ równoważnie $\rho_{AB} = \sum_i p_i |\psi_i^A\rangle\langle\psi_i^A| \otimes |\psi_i^B\rangle\langle\psi_i^B|$

Pozostałe stany nazywamy splątanymi

Jeśli $\rho_{AB} = |\psi\rangle\langle\psi|$ to to definicja równoważna $|\psi\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$

. Jeśli A i B dysponują np. prostym stanem np $\rho_{AB} = |0\rangle\langle 0| \otimes |0\rangle\langle 0|$ to poprzez LOCC mogą utworzyć dowolny stan separowalny.

Problem Dla stanów mieszanych w ogólności b. trudno stwierdzić czy stan jest splątany czy nie ?!

splątany czy nie ?!

4. Kryterium PPT

Przykład

Weźmy stan dwóch qubitów

$$\rho = p|\psi^-\rangle\langle\psi^-| + \underbrace{(1-p)\cdot\frac{\mathbb{1}}{4}}_{\text{szum}}$$

(np. jedna cząstka puszczana przez zaszumiony kanał
np. Pauli channel ⇗)

Jasne jest że dla $p=1$ stan jest splątany
a dla $p=0$ jest separowalny.
Ale gdzie jest granica splątania ?

Definicja Częściowa transpozycja

$$\rho = \sum \rho^{i_A i_B}_{j_A j_B} |i_A\rangle\langle j_A| \otimes |i_B\rangle\langle j_B|$$

↑ ogólny stan dwóch podukładów.

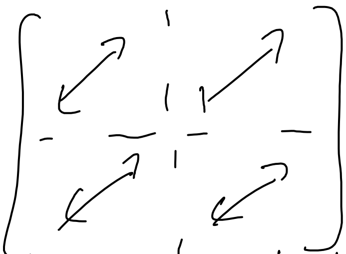
$$\rho^{T_B} = \sum \rho^{i_A j_B}_{j_A i_B} |i_1\rangle\langle j_1| \otimes |i_2\rangle\langle j_2|$$

↑ częściowa transpozycja względem drugiego podukładu

Przykład ⇗

Dwa qubity (w bazie $|0,0\rangle, |0,1\rangle, |1,0\rangle, |1,1\rangle$)

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho^{00}_{00} & \rho^{00}_{01} & \rho^{00}_{10} & \rho^{00}_{11} \\ \rho^{01}_{00} & \rho^{01}_{01} & \rho^{01}_{10} & \rho^{01}_{11} \\ \rho^{10}_{00} & \rho^{10}_{01} & \rho^{10}_{10} & \rho^{10}_{11} \\ \rho^{11}_{00} & \rho^{11}_{01} & \rho^{11}_{10} & \rho^{11}_{11} \end{bmatrix}$$

$\rho^{T_2} =$ 

Transpozycja w podblokach

Twierdzenie Jeśli stan ρ jest separowalny

to $\rho^{T_B} \geq 0$ (równoważnie $\rho^{T_A} \geq 0$

to $\varrho^{T_B} \geq 0$ { równoważnie $\varrho^{T_A} \geq 0$

Dowód:

Zauważmy że dla dowolnego operatora $\sigma \geq 0$ mamy $\sigma^T \geq 0$. Dlaczego:

$$\sigma = \sum_i \lambda_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad , \quad \lambda_i \geq 0$$

↑ wekt własne

$$|\varphi\rangle = \sum_k c_k |k\rangle \qquad |\varphi\rangle\langle\varphi| = \sum_{k,k'} c_k c_{k'}^* |k\rangle\langle k'|$$

$$|\varphi\rangle\langle\varphi|^T = \sum_{k,k'} c_{k'} c_k^* |k\rangle\langle k'| = |\varphi^*\rangle\langle\varphi^*|$$

gdzie $\varphi^* = \sum c_k^* |k\rangle$. Czyli wartości własne się nie zmieniają a jedynie mogą zmieniają się wekt. własne

{ uwaga: transpozycja jest operacją, która jest zależna od bazy w której ją robimy.

Jeśli ϱ separowalny:

$$\varrho_{AB} = \sum_i p_i \varrho_i^A \otimes \varrho_i^B \qquad \varrho_{AB}^{T_B} = \sum_i p_i \varrho_i^A \otimes (\varrho_i^B)^T$$

$(\varrho_i^B)^T \geq 0$ czyli $\varrho_{AB}^{T_B} \geq 0$ ∎

Wniosek:

Jeśli policzymy że $\varrho_{AB}^{T_B} \ngeq 0$ wiemy na pewno że stan jest splątany !

(warunek dostateczny splątania, warunek konieczny separowalności

Uwaga: Dla niskowymiarowych przypadków 2×2, 2×3, jest to warunek konieczny i dostateczny. (Horodecki, konstytując z Woronowicza, charakteryzacja odwzorowań dodatnich — powiemy trochę później

Przykład:

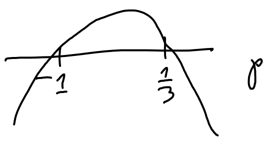
$$\rho = p|\psi^-\rangle\langle\psi^-| + \frac{1-p}{4}\mathbb{1} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & p & -p & \\ & -p & p & \\ & & & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1-p}{2} & & & \\ & \frac{1-p}{2} & & \\ & & \frac{1-p}{2} & \\ & & & \frac{1-p}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1-p}{2} & & & \\ & \frac{1+p}{2} & -p & \\ & -p & \frac{1+p}{2} & \\ & & & \frac{1-p}{2} \end{bmatrix}$$

$$\rho^{T_B} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{1-p}{2} & & & -p \\ & \frac{1+p}{2} & & \\ & & \frac{1+p}{2} & \\ -p & & & \frac{1-p}{2} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$\left(\frac{1-p}{2}\right)^2 - p^2 \geq 0 \qquad \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}p\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}\right) \geq 0$$



$$p \leq \frac{1}{3}$$