

Teoria pomiarów kwantowych

1. „Postulat pomiarowy” w mechanice kwantowej
 Z każdej mierzonej wielkości fizycznej związany
 jest operator hermitowski $A = \sum_i \lambda_i |a_i\rangle\langle a_i|$
 $\uparrow$ wartości własne

W wyniku pomiaru stanu $|\psi\rangle$, uzyskany
 wynik λ_i z prawdopodobieństwem $p_i = |\langle\psi|a_i\rangle|^2$

Po pomiarze: $|\psi\rangle \rightarrow |a_i\rangle$

(Redukcja funkcji falowej)

Wartość oczekiwana obserwabli $\langle A \rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle$

Mówiąc inaczej: Mamy pewien zestaw ortogonalnych uprządkowanych

$P_i = |a_i\rangle\langle a_i|$ i dany wynik i zdarzeń

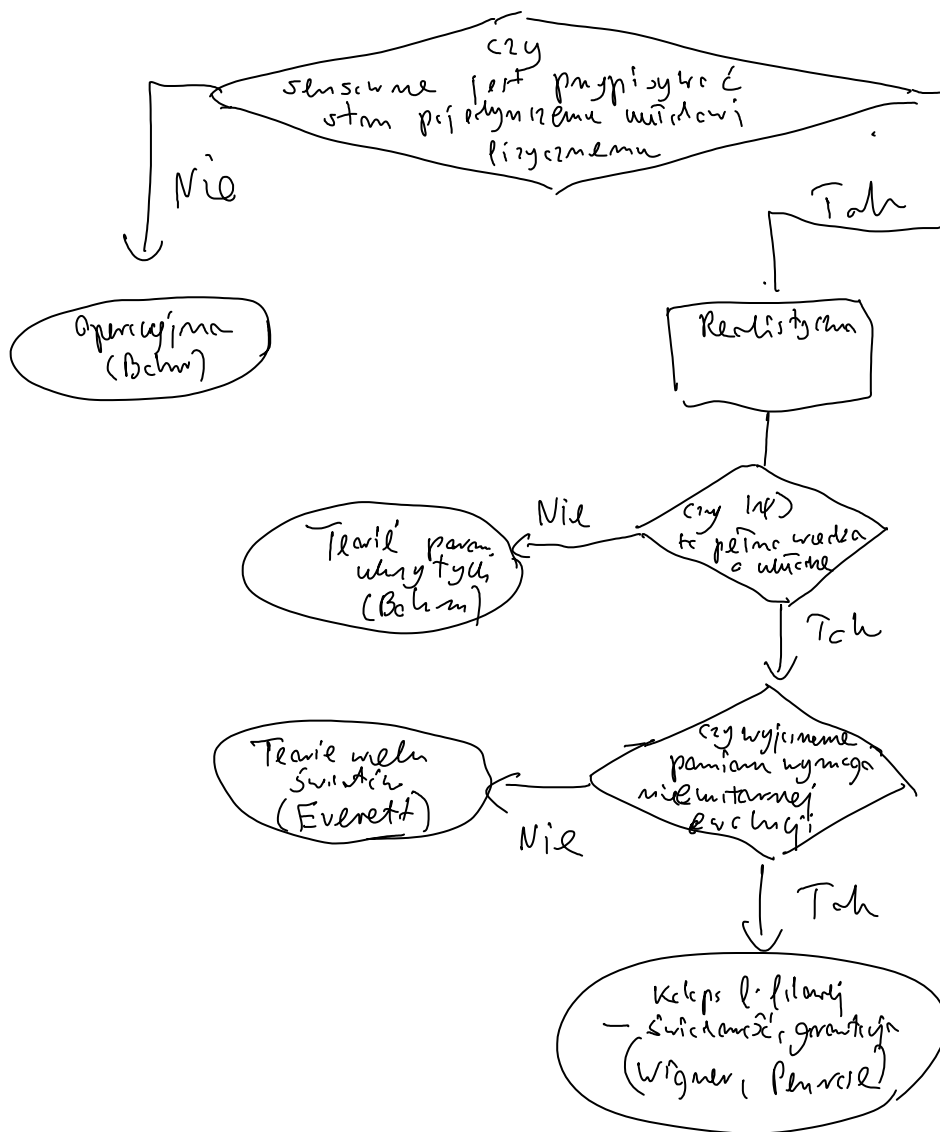
z prawdopodob. $p_i = \langle\psi|P_i|\psi\rangle = \text{Tr}(P_i S)$

— Pomiar niestacjonary.

Tym samym ewolucja $|\psi\rangle$ w mechanice kwantowej
 odbywa się na dwa sposoby

- ciągła, deterministyczna ewolucja unitarna
 zdef. przez równ. Schrödingera
- nieciągła, probabilistyczna zmiana $|\psi\rangle$
 do jednego ze stanów własnych $|a_i\rangle$
 po pomiarze

2. Interpretacje (Operacyjna vs Realistyczna)



2.10 Opierczywna (~Kopenhaska)

Funkcja falowa l.p.) nie należy traktować jako stanu układu, bez podania pełnej uogólni pamiarowej

l.p.) - jest momentem próbowania przenieść do rzeczywistości zdanie przy wykorzystaniu pomiaru eksperymentalnego z tego samego przygotowania i pomiaru.

W tym sensie l.p.) przypisane jest całej zbiorowi stanów przygotowanych w pewien sposób - nie przedmiotem układu?

Bez zdefiniowania pomiaru nie można się pytać

Bez zdefiniowania pomiaru nie można się pytać
o się właściwie dzieje z cząstką ---

Jeśli mówimy „próbowanie”, „pomiar”,
nie mówimy o właściwościach cząstki, lecz
o pewnych schematach pomiarowych.

Problemy pomiaru jest pięćdziesiąt pięć w teorii;
i jego opis nie musi się, w teorii

2.2 Redukcja

a) teoria parametrów ukrytych, gdzie f. falowa
to tylko nie kompletny opis rzeczywistości.
To by było tej teorii redukcja, a f. falowa
wynikający z niedostatecznego opisu - br.
wiedzy o układzie

b) Funkcja falowa daje pełny opis i
jest sens mówić o stanie przypisywanego układu

kwantowego, „To cząstka ma taki stan polaryzacyjny,
taka f. falowa ---

bez mówienia o nim a całej sytuacji obserwacyjnej.

Funkcja f. falowej - coś realnego, realny proces
Kłopot f. falowej $\psi \rightarrow \psi^2$ wymaga
wyjaśnienia, jak pewne odkształcanie
układu z umiarkowanymi pomiarami (które
też jest kwantowe)

Problem - ewolucja układu nie do się
wyjaśnić tego, co wychodzi poza kompletny
wynik., (długość nie wystarcza)

• Pomiar musi być nadany inną dynamiką
- wpływ świadomości (Wigner, Penrose)
(wywołanie nieświadomości - do pewnego

- granitica, lewantane intara ciclepmetali: - welese obelity kclapukja de-penyh ybnyth stanch

$$|\psi\rangle_{\text{AMO}} = \sum_i c_i |\psi_i\rangle |i\rangle |0_i\rangle$$

1) Istnieje tylko jedna wersja Głównego f. planu
Istnieje jedna „możliwa wersja” reprezentująca same myślenie.

Ogólna madowść:

(płomny ludzki przyrodzie tenże wygłoszący
wielki, piewający, tutaj mój waleczny...
Świat obserwujemy od świąt

(Zetaj post tak, ze nie mienimy bezpolednio
 interesujacy nas wielosci i ponow mutacy
 nie post wygody opisanie.

• pomiar stanu - Gleda. Chyba modyfikacja:
 mierzalne oddziaływanie spinowych i przestrzennych
 stopni swobody $\rightarrow$ pomiar przestrzennych
 stopni swobody $\rightarrow$ zmierzanie z spinowych
 st. swobody

• pomiar linii lotami wędrującymi detektorami
 (wydajność $< 100\%$, czułość znikoma)
 - „pomiar ramy”. - to jest wysłuchiwanie
 w razie czego jest zmierzanie z stanem
 w lotami.

Pomiar uogólniony:

- cel jest oddziaływanie z układem
 pomiarowym (opisanym kwantowo)
- obserwator ma bezpośrednie
 stan układu pomiarowego

Opis matematyczny:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M & \xrightarrow{\quad} & U \mathcal{S}_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{układ} & \text{stan początkowy} & \text{oddziaływanie z} \\ & \text{układu} & \text{układu pomiarowego} \\ & \text{pomiarowego} & \end{array}$$

No więc mamy układ pomiarowy
 w której bierzemy np. $|i\rangle$: pomiar wtedy $P_i = |i\rangle\langle i|$
 prawdopodobieństwo wyniku i :

$$\begin{aligned} p_i &= \text{Tr} \left(U \mathcal{S}_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger \mathcal{I}_S \otimes P_i^M \right) = \\ &= \text{Tr} \left(\mathcal{S}_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger \mathcal{I}_S \otimes P_i^M U \right) = \\ &= \text{Tr}_S \left(\mathcal{S}_S \cdot \underbrace{\langle 0|U^\dagger \mathcal{I}_S |0\rangle\langle 0|U}_{\text{Tr}_S^S} \right) \end{aligned}$$

$$= \text{Tr} (S_S \Pi_i^S)$$

↑ uogolniona op. pomiarowe
(nie konieczne mierniki)

$$\sum_i \Pi_i^S = \mathbb{I}_S, \quad \Pi_i^S \geq 0$$

Zauważmy, porównując 2 wyprawy do
budynku: ulica otwartego i

$$\Pi_i = K_i^\dagger K_i$$

Czyli cz. ulicy otwartego miernik
interpretacji fazy z każdym Kraus
stawianym być powinien wyniki pomiaru
nie otwierania...

Pracownicy teledziat otwarto: Dla danych

$$\Pi_i \geq 0, \quad \sum_i \Pi_i = \mathbb{I} \quad \text{mierniki}$$

co daje $\mathcal{U}$ nie rozszerzając przestrzeni i
pomiar P_i^m taki i efektywnie $p_i = \text{Tr}(P_i \Pi_i)$

$$\{ U |\psi\rangle |a\rangle = \sum_i \sqrt{\Pi_i} |\psi\rangle |i\rangle$$

Def: Pomiarom uogólnionym (POVM),

zamykamy każdy zestaw op. dodatnich Π_i

$$\text{t.j.} \quad \sum_i \Pi_i = \mathbb{I}.$$

Przykład Jedynkowy pomiar pólcałki: pęd $\vec{p}$

Przebieg ulicy tuteż ciastek pędowych i w
jednym wymiarze:

$$|\psi\rangle \otimes \underbrace{|\psi_0\rangle}_{\text{mierniki pomiaru}} \xrightarrow{\hat{p}} |\Psi_{\text{in}}\rangle$$

↑
ulica
l. 3. 3. 3.

mierniki
pomiaru

$$\left\{ \hat{p} = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}} \right.$$

$$\hat{p} = \frac{a - a^\dagger}{i\sqrt{2}}$$

Przebieg oddziaływań $H = (\hat{q}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{q}_2) \delta(t)$
 gdzie $\hat{q}_1, \hat{p}_1$ - op. p. i. i. p. dla układu 1, $\hat{p}_2, \hat{q}_2$ - analogicznie dla układu 2.

Oprócz ewolucji

$$U = e^{-i(\hat{q}_1 \hat{p}_2 - \hat{p}_1 \hat{q}_2)}$$

Mierzmy q_1 i p_2 na momentach 1 i 2

$$P(q_1, p_2) = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \otimes |\psi_0\rangle\langle\psi_0| U^\dagger |q_1\rangle\langle q_1| \otimes |p_2\rangle\langle p_2| U)$$

$$P(q_1, p_2) = \langle\psi_0| U^\dagger |q_1\rangle\langle q_1| \otimes |p_2\rangle\langle p_2| U |\psi_0\rangle$$

Wygodna notacja

$$\delta(q - \hat{q}) = |q\rangle\langle q| \quad \left\{ \begin{aligned} \delta(q - \hat{q}) &= \int e^{i(q - \hat{q})p} dp = \\ &= \int dp dq' e^{i(q - q')p} |q' > \langle q| \neq |q' > \langle q| \end{aligned} \right.$$

$$= \langle\psi_0| U^\dagger \delta(q_1 - \hat{q}_1) \delta(p_2 - \hat{p}_2) U |\psi_0\rangle$$

$$U^\dagger \hat{q}_1 U = \hat{q}_1 + \hat{q} - \frac{1}{2} \hat{q}_2 = \hat{q} - \hat{q}_1$$

$$U^\dagger \hat{p}_2 U = \hat{p}_2 + \hat{p} - \frac{1}{2} \hat{p}_1 = \hat{p} + \hat{p}_1$$

$$\left\{ \begin{aligned} e^A B e^{-A} &= B + [A, B] + \frac{1}{2!} (A, [A, B]) + \dots \end{aligned} \right.$$

$$\text{Zauważ, że mamy zdefiniować } \hat{q}_1 = \frac{\hat{q}_2}{2} - \hat{q}_1$$

$$[\hat{q}_1, \hat{p}_1] = i \quad \hat{p}_1 = \hat{p}_2 - \frac{1}{2} \hat{p}_1$$

Mierzmy myślicie kolejno o jednym macie

uzupełnić pomiarowego (kambinacja dwóch stanów)
 Nach $|\psi_0\rangle = N \int dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2}} |q_1\rangle$ - st. podstawowy
 osc. harm.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{iscale: } |\psi_0\rangle = \left(N \int dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2}} |q_1\rangle \right) \otimes |\Phi\rangle_g \\ \quad \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad \quad \text{nie ma mierzalnego} \\ \quad \quad \quad \text{nie ma mierzalnego} \end{array} \right.$$

$$\Pi_{q_1, q_2} = \langle \psi_0 | \delta(q_1 - \hat{q}_1 - \hat{q} + \frac{1}{2} q_2) \delta(p_2 - \hat{p}_2 - \hat{p} + \frac{1}{2} p_1) | \psi_0 \rangle =$$

$$= \langle \psi_0 | \delta(q_1 - \hat{q} + \hat{q}_1) \delta(p_2 - \hat{p} - \hat{p}_1) | \psi_0 \rangle$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \psi_0 | = \int dq_1 e^{-\frac{q_1^2}{2}} \langle q_1 | \\ | \psi_0 \rangle = \int dp_1 e^{-\frac{p_1^2}{2}} | p_1 \rangle \end{array} \right.$$

1

$$\delta(q_1 - \hat{q} + \hat{q}_1) = \int dk e^{ik(q_1 - \hat{q} + \hat{q}_1)} =$$

$$= \int dq_1 \int dk e^{ik(q_1 - q + q_1)} |q\rangle \langle q| \otimes |q_1\rangle \langle q_1|$$

$$\delta(p_2 - \hat{p} - \hat{p}_1) = \int dp_1 \int dk' e^{ik'(p_2 - p - p_1)} |p\rangle \langle p| \otimes |p_1\rangle \langle p_1|$$

$$\langle \psi_0 | \dots | \psi_0 \rangle =$$

$$= \int dq dp \int dq_1 dp_1 e^{-\frac{q^2}{2} - \frac{p^2}{2}} \int dk dk' e^{ik(q_1 - q + q_1) + ik'(p_2 - p - p_1)}$$

$$e^{iqp + iqp_1} |q\rangle \langle p| =$$

$$= \int dq dp e^{-\frac{(q_1 - q)^2}{2} - \frac{(p_2 - p)^2}{2} + iqp - i(q_1 - q) \cdot (p_2 - p)} |q\rangle \langle p|$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle p| = \int dq' \langle q'| e^{-iq'p} \\ \dots \end{array} \right.$$

$$= \int dq dq' dp e^{-\frac{(q_1 - q)^2}{2} - \frac{(p_2 - p)^2}{2} + iqp - iq'p - i(q_1 - q) \cdot (p_2 - p)} |q\rangle \langle q'|$$

$$p_2^2 + i(p_2 - p_1) \cdot (q_1 - q) + (q_1 - q)^2$$

2. Schüler sind die normalste Art. many:

Czyli PóVM - mutowane na day
Adventine.

De laatste metingen $\hat{I}_2 - \hat{I}_1$ zijn:

My brother my Stan gamsenhi.

czyli średnie ok

Kwanty 15 Strona 9

$$\begin{aligned} \delta q^2 |_{\mathcal{J}} &= \langle (\hat{q} - \hat{q}_l)^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 = \langle \hat{q}^2 \rangle + \langle \hat{q}_l^2 \rangle - \langle \hat{q} \rangle^2 = \\ &= \delta^2 q + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\delta p^2 |_{\mathcal{J}} = \langle (\hat{p} + \hat{p}_l)^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = \delta^2 p + \frac{1}{2}$$

czyli: $\delta q^2 |_{\mathcal{J}} \cdot \delta p^2 |_{\mathcal{J}} = \delta q^2 \delta p^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\delta q^2 + \delta p^2)$

$$\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

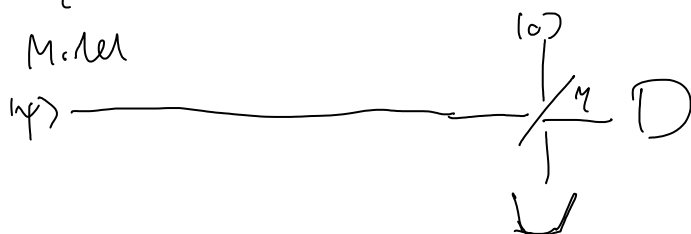
Dł. granic Targera:

$$\delta q \cdot \delta p \geq 1$$

($\hookrightarrow$ porównanie z twierdzeniem $\delta q \delta p \geq \frac{1}{2}$)

Przykład Detektor linii lotniczych o danej sprawności

η - prawd. że det. zarejestruje lotn.



Dł. idealnego detektora prawdopodobieństwo wystąpienia na $|m\rangle\langle m|$, $|m\rangle$ stan m lotnisk.

$$P_m = \text{Tr}(U|\psi\rangle\langle\psi| \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger |m\rangle\langle m| \otimes \mathbb{I})$$

$$U^\dagger |m\rangle\langle m| \otimes \mathbb{I} U = U^\dagger |m\rangle\langle m| \otimes \sum_m |m\rangle\langle m| U$$

$$\begin{aligned} |m\rangle &= \frac{a^\dagger}{\sqrt{m!}} |vac\rangle \\ |m\rangle &= \frac{b^\dagger{}^m}{\sqrt{m!}} |vac\rangle \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} U a^\dagger U^\dagger &= \sqrt{\eta} a^\dagger + \sqrt{1-\eta} b^\dagger \\ U b^\dagger U^\dagger &= \sqrt{\eta} b^\dagger - \sqrt{1-\eta} a^\dagger \\ U^\dagger a^\dagger U &= \sqrt{\eta} a^\dagger - \sqrt{1-\eta} b^\dagger \end{aligned} \right. \quad \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \sqrt{1-\eta} \\ -\sqrt{1-\eta} & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

...

$$|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}} |vac\rangle \left\{ \begin{array}{l} U^\dagger a^\dagger U = \sqrt{\eta} a^\dagger + \sqrt{1-\eta} b^\dagger \\ U^\dagger b^\dagger U = \sqrt{\eta} b^\dagger + \sqrt{1-\eta} a^\dagger \end{array} \right. \downarrow \begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & \sqrt{1-\eta} \\ \sqrt{1-\eta} & \sqrt{\eta} \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger \sum_m \frac{a^\dagger{}^m}{m!} \frac{b^\dagger{}^m}{m!} U \Big|_{vac} = \sum_m \frac{a^\dagger{}^m}{m!} \frac{b^\dagger{}^m}{m!} U$$

Operatory a i b nie zmieniają $\langle 0|10\rangle$ i mamy b
 czyli zderzenie tylko ośrodków bez $b^\dagger$

$$\frac{(\sqrt{\eta} a^\dagger)^m}{m!} \approx \frac{1}{m!} (\sqrt{1-\eta} a^\dagger)^m |vac\rangle \leftarrow \dots \leftarrow$$

$$\Pi_m = \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} \eta^m (1-\eta)^{k-m} |k\rangle \langle k|$$

$$\begin{aligned} \sum_m \Pi_m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=m}^{\infty} \binom{k}{m} \eta^m (1-\eta)^{k-m} |k\rangle \langle k| = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^k \binom{k}{m} \eta^m (1-\eta)^{k-m}}_{=1} |k\rangle \langle k| = \mathbb{I} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Zauważ, że Π_m nie są ortogonalne.

$$\rho_m = \text{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi| \Pi_m)$$

4. Rozkładanie się stanów kwantowych

Optymalna strategia rozmiaru 2 stanów.

Mamy S_1, S_2 dwa stany przygotowane z
 prawdopodobieństwami p_1 i p_2 .

Szukamy pomiaru Π_1, Π_2 , $\Pi_1 + \Pi_2 = \mathbb{I}$ t.j. z
 średnim błędem minimalnym

$$P_e = p_1 \cdot \text{Tr}(\Pi_2 S_1) + p_2 \cdot \text{Tr}(\Pi_1 S_2)$$

$$\Pi_1 = \mathbb{I} - \Pi_2$$

$$\Pi_2 = I - \Pi_1$$

$$P_L = \text{Tr} \left((I - \Pi_1) \rho_1 S_1 + \Pi_1 \rho_2 S_2 \right) =$$

$$= \rho_1 + \text{Tr} \left(\Pi_1 (\rho_2 S_2 - \rho_1 S_1) \right)$$

Chcemy to zminimalizować ok graniczny

$$\text{czy } 0 \leq \Pi_1 \leq I.$$

$A = \rho_2 S_2 - \rho_1 S_1$ - op. hermitowski, ma
dodatnie i ujemne wartości

$\text{Tr}(\Pi_1 A)$ będzie najmniejszą jeśli
weźmiemy Π_1 jako mat. z najniższymi
a ujemnymi wartościami.

$$\Pi_1 = P_- \quad \Pi_2 = I - P_- = P_+$$

$$\text{Tr}(P_- A) = \frac{1}{2} (A - |A|)$$

Czyli

$$P_L = \rho_1 + \frac{1}{2} (\rho_2 - \rho_1) - \frac{1}{2} |\rho_2 S_2 - \rho_1 S_1| =$$

$$= \frac{1}{2} (1 - |\rho_2 S_2 - \rho_1 S_1|)$$

Przykład szczególny

$$S_1 = |\psi\rangle\langle\psi| \quad S_2 = |\varphi\rangle\langle\varphi| \quad \rho_1 = \rho_2 = \frac{1}{2}$$

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$$|u\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$$|v\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle - \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$$

$$\frac{1}{2}(|u\rangle\langle u| - |v\rangle\langle v|) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \sin \theta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sin \theta (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

$$P_e = \frac{1}{2}(1 - \sin \theta) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - \langle u|v\rangle^2})$$

{ co jeśli mamy n egzemplarzy stanu?

5. Optymalna estymacja zupełnie nieznanego stanu kwant.

5.1 Co to znaczy zupełnie nieznan.

$$|u\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle$$

powinno być jakieś naturalne „najbardziej niezmyślny” rozkład = prior.

Naturalne: $p(\theta, \varphi)$ - rozkład

niezmieniony na płaszczyźnie Blocha



$$d\varphi = d\theta d\varphi \quad p(\theta, \varphi) = d\theta d\varphi \sin \theta$$

Wyznaczenie rozkładu - minimumy względem transformacji unitarych. (obrotów sfery)

$$\int d\varphi \, p(\varphi) \xrightarrow{\varphi = U \cdot \varphi'} \int d\varphi' \, p(U \cdot \varphi')$$

Wyznaczenie rozkładu mamy dzięki działaniu grupy,

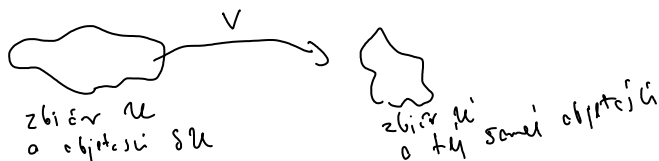
(Bardziej formalnie: (M. dowolnego wymiaru $\dim \mathcal{H} = d$)

zamiast $\int_{\Psi} d\psi \rho(\psi) = \int_{\mathcal{U}} d\mu \rho(\mathcal{U} \cdot |0\rangle)$

dec. kłody grupy wartości, wyróżniając miarę mierniczą - miarę Haar, t.j. jeśli zamienię zmienne $V \cdot \mathcal{U}' = \mathcal{U}$

$$\int d(V \mathcal{U}') \rho(V \mathcal{U}' | 0) = \int d\mathcal{U}' \rho(V \mathcal{U}' | 0)$$

$\int d\mathcal{U} = 1$



Mamy natomiast mierniczą metryczną

$$ds^2 = \text{Tr}(d\mathcal{U} d\mathcal{U}^\dagger) = \sum_{\alpha\beta} g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

W której α parametrizacji

Miara Haar:

$$d\mu(x) = \sqrt{\det g(x)} \prod_{\alpha} dx^{\alpha}$$

3.2 Optymalna estymacja

wybieramy funkcję ryzyka, nagradzając nas za rozpoznanie stanu bliskiego prawdziwemu.

Nad $F(\psi, \psi')$ będzie f. ryzyka jeśli prawdziwy stan był $|\psi\rangle$ a my zgłosimy $|\psi'\rangle$.

Niech $\{\Pi_x\}$ będzie POVM $\int dx \Pi_x = \mathbb{I}$

Ustalamy strategię umiarkowania:

jeśli wyniki x to zgłosimy stan $|\psi_x\rangle$

$$\begin{array}{c} p(|\psi\rangle), |\psi\rangle \xrightarrow[\text{pomiar}]{\{\Pi_x\}} x \xrightarrow[\text{estymacja}]{} |\psi_x\rangle \\ \uparrow \\ \text{niektóre} \\ \text{opinie} \end{array}$$

$p(x|\psi) = \langle \psi | \Pi_x | \psi \rangle$

Średnia nagroda:

$$F = \int d\psi p(\psi) \int dx p(x|\psi) F(\psi, \psi_x)$$

wyberamy $p(\psi)=1$ $\left\{ \int d\psi = 1 \right.$ miara jednostkowa na płaszczyźnie

$$F(\psi, \psi_x) = |\langle \psi | \psi_x \rangle|^2 \quad - \text{wielkość}$$

$$F = \int d\psi \int dx \langle \psi | \pi_x | \psi \rangle |\langle \psi_x | \psi \rangle|^2$$

szukamy $F_{\text{opt}} = \max_{\{\pi_x\}} F$, wtedy $x \rightarrow |\psi_x\rangle$

Majemy optymalną strategię estymacji:
Zwróćmy uwagę, że mamy parametry numeryczne
op. pomiarowe przez ψ_x zamiast x . W ten
sposób zbieramy pomiar + estymator w jedną całość.

$$F = \int d\psi \int d\tilde{\psi} \langle \psi | \pi_{\tilde{\psi}} | \psi \rangle \cdot |\langle \tilde{\psi} | \psi \rangle|^2$$

Problem tenże bo potencjalnie nieścisłość
wiel. op. pomiarowych: $\max_{\{\pi_{\tilde{\psi}}\}} F$

5.3 Pomiar kowariantny

Poszukiwanie optymalnych pomiarów ma miejsce
się upraszcza gdy mamy symetrię wzgl.
 pewnych grup. Np u nas, jeśli $d\psi$ - miara
niezmieniona na płaszczyźnie Blocha, mamy symetrię
problemu względem obrotów sfery Blocha
To pozwala bardzo uprościć problem!

Ogólny problem:

Ogólny problem:

$g \in G$ - element grupy $\rightarrow$ zachowany p.p. pier
representacja unitarna w stanie $|\psi_g\rangle = U_g |a\rangle$

Mieć być miarą w stanie nieskorygowanym

$$S_g = U_g S_a U_g^\dagger$$

$\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ - partia, czyli g' zmienia polećszenie
estymowane $\tilde{g}$.

$F(g, \tilde{g})$ - pewna funkcja ryzyka

$$F = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\Pi_{\tilde{g}} S_g) F(g, \tilde{g})$$

Założenia: (problem estymacji z symetrią wzgl grupy G)

- dg - miara Haarowa grupy G

$$\left\{ \begin{array}{l} g' = hg \\ dg' = dg \end{array} \right.$$

- $F(hg, h\tilde{g})$ - f. ryzyka niezmiennicza (lewa)

wzgl działania grupy.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Zauważmy że to wszystkie part spełniające} \\ \text{dla problemu estymacji qubitów. } |\langle \tilde{\psi} | \psi \rangle|^2 = |\langle \tilde{\psi} | U^\dagger U | \psi \rangle|^2 \end{array} \right.$

Definicja

$\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ mający kowariancyjny względem
grupy $G \Leftrightarrow \forall_{\tilde{g}, h} U_h \Pi_{\tilde{g}} U_h^\dagger = \Pi_{h\tilde{g}}$

Wniosek:

Jeśli $\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ part kowariantny to

$$\Pi_{\tilde{g}} = U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^\dagger$$

Innymi słowy pomiar kowariantry w pełni określa, przez działanie jednego operatora $\hat{T}_E$

Twierdzenie

Jeśli problem optymalny BAgm-ji ma symetrię względ grupy G (dł-miar H_{cov} , $F(hg, h'g') = F(g, g')$)

Optymalny pomiar macierze zawsze ma być pierwiastkiem kowariantry względ grupy G

Dowód

Niech $\hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{opt}$ będzie optymalnym pomiarem kowariantry F :

$$F_{opt} = \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{opt} S_g) F(g, \tilde{g})$$

Zdefiniujmy

$$\hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{cov} = \int dg' U_{g'}^\dagger \hat{\Pi}_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'}$$

Po pierwsze $\hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{cov}$ jest kowariantry:

$$U_h \hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{cov} U_h^\dagger = \int dg' U_{hg'}^{-1} \hat{\Pi}_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{hg'^{-1}}$$

$$\stackrel{g' \rightarrow g'h}{=} \int dg' U_{g'} \hat{\Pi}_{g'h\tilde{g}}^{opt} U_{g'} = \hat{\Pi}_{h\tilde{g}}^{cov}$$

Po drugie dzięki tej samej własności $\hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{opt}$:

$$\begin{aligned} F_{cov} &= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}(\hat{\Pi}_{\tilde{g}}^{cov} S_g) F(g, \tilde{g}) = \\ &= \int dg d\tilde{g} \text{Tr}\left(\int dg' U_{g'}^\dagger \hat{\Pi}_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'} U_g S_g U_g^\dagger\right) F(g, \tilde{g}) \\ &= \int dg d\tilde{g} dg' \text{Tr}(U_{g'g}^\dagger \hat{\Pi}_{g'\tilde{g}}^{opt} U_{g'g} S_g) F(g, \tilde{g}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} g \rightarrow g^{i^{-1}} g \\ \tilde{g} \rightarrow g^{i^{-1}} \tilde{g} \end{cases} \\
& = \int dg d\tilde{g} dg' \operatorname{Tr} \left(U_g^\dagger \Pi_{\tilde{g}}^{crt} U_g S_e \right) F(g^{i^{-1}} g, g^{i^{-1}} \tilde{g}) = \\
& = \int dg d\tilde{g} dg' \operatorname{Tr} \left(\Pi_{\tilde{g}}^{crt} S_g \right) F(g, \tilde{g}) = F_{crt} \quad \square
\end{aligned}$$

Problem many. we can approximate

$$\begin{aligned}
F &= \int dg d\tilde{g} \operatorname{Tr}(\Pi_{\tilde{g}} S_g) F(g, \tilde{g}) = \\
&= \int dg d\tilde{g} \operatorname{Tr} \left(U_{\tilde{g}}^\dagger \Pi_e U_{\tilde{g}}^\dagger U_g S_e U_g^\dagger \right) F(g, \tilde{g}) \\
&= \int dg d\tilde{g} \left(\operatorname{Tr} \left(U_{\tilde{g}}^\dagger \Pi_e U_{\tilde{g}} S_e \right) F(g, \tilde{g}) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} g \rightarrow \tilde{g} g \end{cases}$$

$$= \int dg d\tilde{g} \operatorname{Tr} \left(U_g^\dagger \Pi_e U_g S_e \right) F(g, e)$$

$$F = \int dg \operatorname{Tr}(\Pi_e S_g) F(g, e)$$

Kanonic problem

max F

$\Pi_e \geq 0$

$$\int dg U_g \Pi_e U_g^\dagger = \mathbb{I}$$

is the orthonormal operation



$$F = \int dg \operatorname{Tr}(\Pi_e S_g) F(g, e)$$

5.4 Znajdujemy optymalną estymację 1 qubit.

$$S_g = |\psi_g\rangle\langle\psi_g|, \quad |\psi_g\rangle = U_g|a\rangle \quad g \in SU(2)/U(1)$$

$$F(g, e) = |\langle \psi_g | 0 \rangle|^2$$

$$F = \int dg \operatorname{Tr}(\Pi_e U_g |0\rangle\langle 0| U_g^\dagger) \cdot \operatorname{Tr}(|0\rangle\langle 0| \cdot U_g |0\rangle\langle 0| U_g^\dagger)$$

$$= \int dg \operatorname{Tr}(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot U_g^{\otimes 2} |0\rangle\langle 0|^{\otimes 2} U_g^{\dagger \otimes 2}) =$$

$$= \operatorname{Tr}(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \underbrace{\int dg U_g^{\otimes 2} |0\rangle\langle 0|^{\otimes 2} U_g^{\dagger \otimes 2}}_A)$$

Zauważ, że $U_h^{\otimes 2} A U_h^{\otimes 2 \dagger} = A$, czyli A

możemy być trochę precyzyjniejsi: $A = \sum_i \lambda_i P_i$

gdzie P_i mamy na przykładzie możemy w ogół
dokładnie reprezentować: $U_g^{\otimes 2}$.

Dwa przedstawienie: $P_- = |\psi^-\rangle\langle\psi^-|$ (mamy na
podstawie
singletu)

$P_+ = |\psi^+\rangle\langle\psi^+| + |\phi^+\rangle\langle\phi^+| + |\phi^-\rangle\langle\phi^-|$ (mamy na
podstawie
trypletu)

Zauważ, że $|0\rangle\langle 0|^{\otimes 2}$ mamy do przedstawienia
trypletu, czyli

$$A = \lambda_+ P_+$$

Wyznamy współczynnik λ_+ :

$$\operatorname{Tr}_1 A = \int dg \operatorname{Tr} |0\rangle\langle 0|^{\otimes 2} = 1$$

$$3 \cdot \lambda_+ = 1$$

$\Pi_1 = |1\rangle\langle 1| \rightarrow$ zgodzimy się

$$\begin{aligned}
 F &= \int d\psi \left(|\langle \psi | 0 \rangle|^2 \cdot |\langle \psi | 0 \rangle|^2 + |\langle \psi | 1 \rangle|^2 \cdot |\langle \psi | 1 \rangle|^2 \right) = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin\theta \left(\cos^4 \frac{\theta}{2} + \sin^4 \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi \sin\theta \left(1 - 2\cos^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^\pi \sin\theta \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) d\theta \\
 &= 1 - \frac{1}{4} \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Czyli ten pierwszy plan nie jest optymalny

5.3 Gdy mamy N kopii: $S_g = |\psi_g\rangle\langle\psi_g|^{\otimes N}$
 $= U_g^{\otimes N} |0\rangle\langle 0|^{\otimes N} U_g^{\dagger \otimes N}$

$$F = \text{Tr} \left(\underbrace{\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0|}_{\text{term dodatk. w } \mathcal{H}^{\otimes N}} \cdot \underbrace{\int dg U_g^{\otimes N+1} |0\rangle\langle 0|^{\otimes N+1} U_g^{\dagger \otimes N+1}}_A \right)$$

$$A = \frac{1}{\dim \mathcal{H}_+^{(N+1)}} P_+^{(N+1)} \quad \dim \mathcal{H}_+ = N+2 \quad \begin{cases} 2J+1 \\ J = \frac{N+1}{2} \end{cases}$$

P podprestrzenie z symetrią

$$F = \frac{1}{N+2} \text{Tr} \left(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| P_+^{(N+1)} \right)$$

$$\int dg U_g^{\otimes N} \Pi_e U_g^{\dagger \otimes N} = \mathbb{1}$$

$$= \sum_i 2i P_i \quad P_i - \text{mody w podprestrzeni maksymalnej } \mathcal{H}^{\otimes N} = \bigoplus_{j=0}^N \mathcal{H}_j$$

Myslny o spinie max $|0\rangle = |+\frac{1}{2}\rangle$

$$|1\rangle = |-\frac{1}{2}\rangle$$

zeby $\Pi_e \otimes |c\rangle\langle c|$ miał spin maksymalny $(\frac{N+1}{2})$

Π_e musi mieć spin $\frac{N}{2}$. Czyli należy on wynosić inne $J < \frac{N}{2}$ niż do tego wskazać do sumacji - może tam być całkowite (tak żeby było no koniec $\uparrow$)

$$\Pi_e = \Pi_e^{J < \frac{N}{2}} + \Pi_e^+$$

$$\text{Wiemy że } \int dg U_g^{\otimes N} \Pi_e^+ U_g^{\otimes N \dagger} = P_+^{(N)}$$

$$\text{czyli } \text{Tr}(\Pi_e^+) = N+1$$

$$\text{Czyli } F \leq \frac{1}{N+2} \cdot N+1 = \frac{N+1}{N+2}$$

I tyle właśnie uzyskamy bierząc

$$\Pi_e^+ = (N+1) |c\rangle\langle c|^{\otimes N}$$

Optymalne estymacje nr N egzemplarzy
qubitów:

$$\left[F = \frac{N+1}{N+2} \right] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$$

tak jak być powinno.

Dla $N > 1$ pomiar już może mieć taką trywialność. Kwieście gromiemy
Tęże no wielu qubitów