

# Wykład 10 - practical protocols

13 grudnia 2014  
21:43

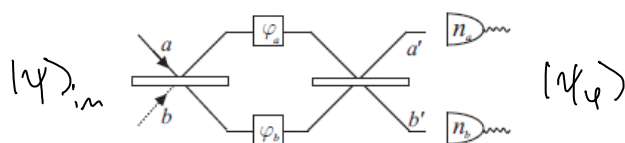
Zarówno stany NOON jak i optymalne Bayesowskie są bardzo trudne do przygotowania w ultraciekich optykach i atomowych a dla dużych  $N$  w zaledwie nie możliwe,

W praktyce: a stany ścisłe w ultraciekich optykach

- stany spinnane-ścisłe, w ultraciekich atomowych (BEC).

+ precyzyjny pomiar obserwabli

## 10.1 Int. Mech. Zehndler



$$\begin{pmatrix} \hat{a}' \\ \hat{b}' \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\varphi_a} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi_b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix} = e^{i(\varphi_a + \varphi_b)/2} \begin{pmatrix} \cos(\varphi/2) & -\sin(\varphi/2) \\ \sin(\varphi/2) & \cos(\varphi/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$\varphi = \varphi_b - \varphi_a$

Wygodne będące używane reprezentacji Jordana-Schwingera

$$J_x = \frac{1}{2} (a^\dagger b + b^\dagger a), \quad J_y = \frac{i}{2} (b^\dagger a - a^\dagger b), \quad J_z = \frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b)$$

$$[J_i, J_j] = i \epsilon_{ijk} J_k$$

$$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2 = \frac{\hat{N}}{2} \left( \frac{\hat{N}}{2} + 1 \right) \quad \hat{N} = a^\dagger a + b^\dagger b$$

total photon number operator

Transformacje na stanach światła będący interpretacją

ich obrotu w abstrakcyjnym przestrzeni spinowej.

$$a' = U a U^\dagger \quad b' = U b U^\dagger \quad U = e^{-i \alpha \vec{J} \cdot \vec{a}}$$

...  $\left[ \frac{J}{2} \right]$

$$e^{-i\varphi J_z} = \text{obrót wokół osi } z$$

$$e^{-i\frac{\pi}{2} J_x} = \text{obrót wokół osi } x$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Dowód przez BCH.} \\ e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \dots \end{array} \right.$

$$\begin{pmatrix} J'_x \\ J'_y \\ J'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_x \\ J_y \\ J_z \end{pmatrix}, \quad (30)$$

Dzięki temu efektywnie  $M_2$  to obrót o kąt  $\varphi$  wokół osi  $y$

$$U_{M_2} = e^{-i\varphi J_y}$$

Chcemy estymować liczbę 2 pomiarów równych zeru nr. detektarów.

$$\hat{n}_a - \hat{n}_b = 2 J_z$$

$$\langle \psi | J_z | \psi \rangle = \int_{in} \langle \psi | J_z | \psi \rangle_{in} = \cos \varphi \langle J_z \rangle_{in} - \sin \varphi \langle J_x \rangle_{in}$$

Widzimy że zmierzając średnią  $\langle J_z \rangle$  mamy informację o  $\varphi$

Jedki liczyli błąd estymacji  $\varphi$  nr. pomiarów  
 pomiarów obserwowali  $J_z$  przez pomiar propagacji błąd  
 To potrzebujemy wariancję obserwowali  $J_z$

$$\Delta^2 J_z = \langle J_z^2 \rangle_{in} - \langle J_z \rangle_{in}^2 =$$

$$= \langle \cos^2 \varphi J_z^2 + \sin^2 \varphi J_x^2 - \cos \varphi \sin \varphi (J_x J_z + J_z J_x) \rangle$$

$$= \left\langle \cos^2 \varphi J_2^2 + \sin^2 \varphi J_x^2 - 2 \cos \varphi \sin \varphi (J_x J_2 + J_2 J_x) \right\rangle_{in}$$

$$= \cos^2 \varphi \langle J_2^2 \rangle_{in} + \sin^2 \varphi \langle J_x^2 \rangle_{in} - 2 \cos \varphi \sin \varphi \langle J_x J_2 + J_2 J_x \rangle_{in}$$

$$= \cos^2 \varphi \Delta J_2^2 + \sin^2 \varphi \Delta J_x^2 - 2 \cos \varphi \sin \varphi \text{cov}(J_x, J_2)_{in}$$

$$\left\{ \text{cov}(J_x, J_2) = \frac{1}{2} (\langle J_x J_2 + J_2 J_x \rangle) - \langle J_x \rangle \langle J_2 \rangle \right.$$

$$\Delta \varphi = \frac{\sqrt{\Delta J_2^2}}{\left| \frac{d \langle J_2 \rangle}{d \varphi} \right|}$$

Przykład:

$$a) |\psi\rangle_{in} = |\alpha\rangle \otimes |0\rangle \quad \left\{ \begin{array}{l} |\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ \begin{array}{c} \uparrow p \\ \text{O}(|\alpha\rangle) \\ \rightarrow x \end{array} \end{array} \right.$$

$$N = |\alpha|^2 \quad \langle J_x \rangle_{in} = 0$$

$$\langle J_z \rangle_{in} = \frac{1}{2} |\alpha|^2 \quad \langle J_x \rangle_{in} = 0$$

$$\langle J_z^2 \rangle_{in} = \frac{1}{4} (|\alpha|^4 - |\alpha|^2) \quad \langle J_x^2 \rangle_{in} = \frac{1}{4} |\alpha|^2$$

$$\Delta J_z^2 = \frac{1}{4} |\alpha|^2 \quad \Delta J_x^2 = \frac{1}{4} |\alpha|^2$$

$$\text{cov}(J_x, J_z) = 0$$

$$\langle J_z \rangle = \cos \varphi \frac{1}{2} |\alpha|^2 \quad \frac{d \langle J_z \rangle}{d \varphi} = \sin \varphi \frac{1}{2} |\alpha|^2$$

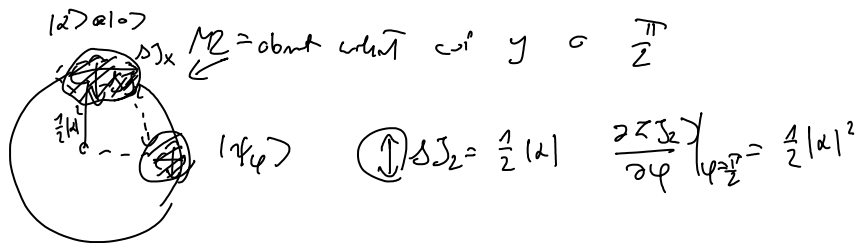
$$\Delta J_z = \frac{1}{2} |\alpha|^2 \cos^2 \varphi + \frac{1}{4} |\alpha|^2 \sin^2 \varphi = \frac{1}{4} |\alpha|^2$$

$$\Delta \varphi = \frac{\frac{1}{2} |\alpha|}{\frac{1}{2} |\alpha|^2 |\sin \varphi|} = \frac{1}{|\alpha| |\sin \varphi|} = \frac{1}{\sqrt{N} |\sin \varphi|}$$

$$\text{optymalny punkt pracy} \quad |\alpha| = \frac{\pi}{2} \quad \Delta \varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

czyli punkt przy  $|k| = \frac{\pi}{2}$   $\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{N}}$

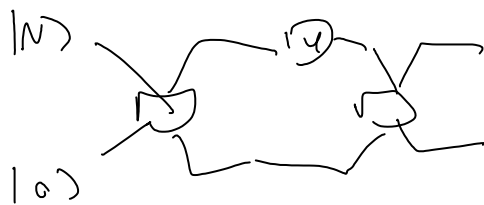
shot noise scaling



Czy mamy ciż zwrócić że stanem reby  $\Delta J_2$  bytć mniejsze i bítad mniejszy.

(Uwaga - pierwsze subtelności z przedziałem  $N \rightarrow \bar{N}$ , nielokalne.)

b)



$$\langle J_z \rangle_{in} = \frac{1}{2} N$$

$$\langle J_x \rangle_{in} = 0$$

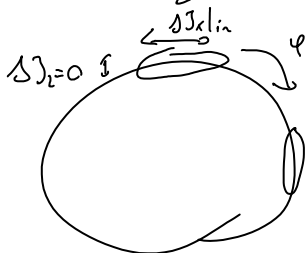
$$\langle J_z^2 \rangle_{in} = \frac{1}{4} N^2$$

$$\Delta^2 J_z|_{in} = 0 \quad \Delta^2 J_x|_{in} = \frac{1}{4} N$$

$$\langle J_z \rangle = \frac{1}{2} N \text{ (ciż)}$$

$$\Delta^2 J_z = \frac{1}{4} N \text{ (ciż)}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{N} \text{ (ciż)}}{\frac{1}{2} N \text{ (ciż)}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$



me mo zmniejsz  
obrot o  $\varphi$  znowe  
to same autóri

brak fluktuacji  $J_z|_{in}$

Taki stan belyny meli w ultracich stanach  
gdzie mamy wiele czestek,

Taki mo powstac to same najmilszy zwrócić  
dłubym z lokalnym golyby meli; tez



$$\Delta\varphi = \frac{\sqrt{|\alpha|^2 e^{-2r} + \sinh^2 r}}{|\alpha|^2 - \sinh^2 r}$$

widny że jest znacznie mniejsze fluktuacji

Optymalizujemy r przy ustalonym  $|\alpha|^2 + \sinh^2 r = \bar{N}$   
 minimalnie. W granicy  $\bar{N} \gg 4$

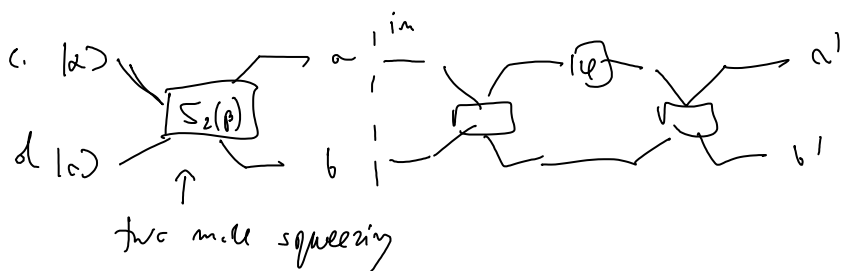
$$\sinh^2 r \approx \sqrt{\bar{N}}/2 \approx \frac{e^{2r}}{4}$$

walencyj stanów w wyniku korekty  $\approx \bar{N} - \sqrt{\bar{N}}/2$

$$\Delta\varphi \approx \frac{\sqrt{\bar{N}/(2\sqrt{\bar{N}}) + \sqrt{\bar{N}}/2}}{\bar{N}} \approx \frac{1}{\bar{N}^{3/4}}$$

Możemy lepiej składowanie!

d) minimalne formu lepiej: (↑)



$$S_2(p): \begin{bmatrix} a \\ b^\dagger \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \frac{1}{2} p & \sinh \frac{1}{2} p \\ \sinh \frac{1}{2} p & \cosh \frac{1}{2} p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ d^\dagger \end{bmatrix}$$

$$\{ S_2(p) = e^{\frac{i}{2} p (c^\dagger d^\dagger + cd)} \quad \text{two mode squeezing}$$

$$\langle \Delta \rangle_{in} = \left\langle \frac{1}{2} (a^\dagger a - b^\dagger b) \right\rangle =$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \left( \cosh \frac{1}{2} p c^\dagger + \sinh \frac{1}{2} p d \right) \left( \cosh \frac{1}{2} p c + \sinh \frac{1}{2} p d^\dagger \right) - \left( \sinh \frac{1}{2} p c + \cosh \frac{1}{2} p d^\dagger \right) \left( \sinh \frac{1}{2} p c^\dagger + \cosh \frac{1}{2} p d \right) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sinh^2 \frac{1}{2} p + \cosh^2 \frac{1}{2} p |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \sinh^2 \frac{1}{2} p - \sinh^2 \frac{1}{2} p \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \sinh^2 \frac{1}{2} \beta + \cosh^2 \frac{1}{2} \beta |\alpha|^2 - |\alpha|^2 \sinh^2 \frac{1}{2} \beta - \sinh^2 \frac{1}{2} \beta \right]$$

$$= \frac{1}{2} |\alpha|^2$$

$$\langle J_x \rangle_{in} = \frac{1}{2} |\alpha|^2 \sinh \beta \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta=0 \text{ oznacza dr. ydrogi} \\ \alpha \end{array} \right.$$

$$\Delta^2 J_z |_{in} = \frac{1}{4} |\alpha|^2$$

$$\Delta^2 J_x |_{in} = \frac{|\alpha|^2}{2} \left( \sinh^2 \beta + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{8} \sinh^2 \beta$$

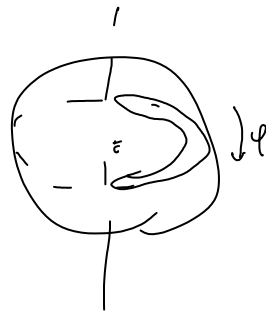
$$\cos(J_x, J_z) |_{in} = \frac{|\alpha|^2}{4} (|\alpha|^2 + 1) \sinh \beta - \frac{|\alpha|^2}{4} \sinh \beta =$$

$$= \frac{|\alpha|^4}{4} \sinh \beta$$

$$\Delta \varphi = \frac{\cos^2 \varphi \frac{1}{4} |\alpha|^2 + \sin^2 \varphi \left[ \frac{|\alpha|^2}{2} \left( \sinh^2 \beta + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{8} \sinh^2 \beta \right] - \sin^2 \varphi \frac{|\alpha|^4}{4} \sinh \beta}{\left| \sin \varphi \frac{1}{2} |\alpha|^2 \pm \cos \varphi \frac{1}{2} |\alpha|^2 \sinh \beta \right|}$$

optimum dla  $\varphi = 0$

$$\Delta^2 \varphi = \frac{1}{|\alpha|^2} \sinh^2 \beta$$



Wzrosty ciśnienia prowadzi do tamowania:

$$\bar{N} = (|\alpha|^2 + 1) \cosh \beta - 1$$

Numerowe optymalizujemy po  $|\alpha|^2$  i wychodzi że  $|\alpha|^2 \approx 1$  i

$$\Delta \varphi \approx \frac{2}{\bar{N}} \quad \text{składowane Heisenberga.}$$

10.2 Im. Kowska, ul. 15 stycznia  
{est. restoracji

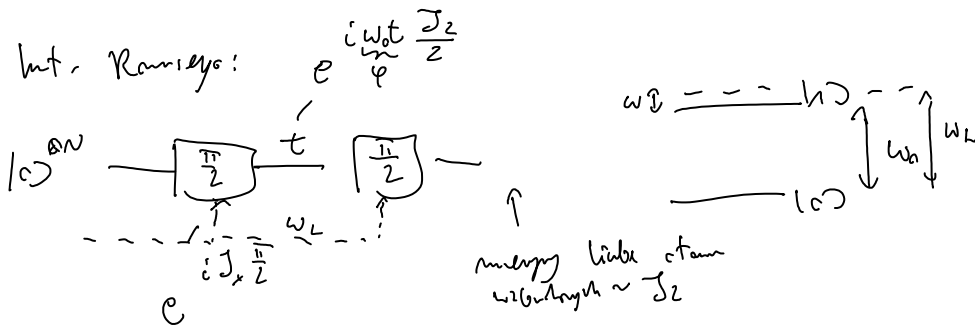
{ est. central  
 { N two level atoms  
 { one-axis, two-axis, ...

N dwupolowym atomów. Troskajemy przez N  
 sferm  $\frac{1}{2}$ ,  $|1\rangle \rightarrow \downarrow \omega_0$  central przejście

$$\mathbb{C}_2^{\otimes N} = \bigoplus_{j=0}^{\frac{N}{2}} \mathcal{H}_j \quad j = \frac{N}{2} \text{ mała ci cika symetryczna}$$

$$J_z = \sum_{i=1}^N \sigma_z^{(i)} \quad J_x, J_y = \dots$$

$$J^2 = j(j+1) = \frac{N}{2} \left( \frac{N}{2} + 1 \right) \text{ dla st. symetrycznych}$$



W trakcie impulsu  $\frac{\pi}{2}$  laser wzbudza laser mamy  
 światło laser a ewoluującym stanem.

Elementarne wyrażenie dla  $\nu$  MZ tylko

$$\varphi = \omega \cdot t \quad \text{gdzie} \quad \omega = \omega_L - \omega_0$$

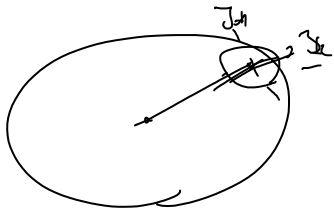
Wyrażenie dla same:

$$\Delta \omega = \frac{\sqrt{\Delta J_z^2}}{\left| \frac{d\langle J_z \rangle}{d\omega} \right|} = \frac{1}{t} \frac{\sqrt{\Delta J_z^2}}{\left| \frac{d\langle J_z \rangle}{d\varphi} \right|}$$

Chcemy mieć stały sinusoidalnie ale bez  
 zmiany linii centralnej, ...



• Stan spiny k. k. =  $|\theta\rangle^{\otimes N} =$   
 $= e^{i\theta(J_x \sin\varphi - J_y \cos\varphi)} |\alpha\rangle^{\otimes N}$



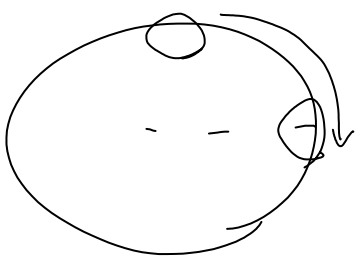
rozwiniemy w kierunku  
 $J$  w kierunku przeciwnym  
do  $\langle \vec{J} \rangle$ .

$$\Delta^2 J_{\perp 1} \Delta^2 J_{\perp 2} \geq \frac{|\langle \vec{J} \rangle|^2}{4} \quad \max \quad |\langle \vec{J} \rangle| = \frac{N}{2}$$

Jeli ktoreś z składowych  $\Delta^2 J_{\perp} \leq \frac{N}{4}$

parametr symetrii  $\xi^2 = \frac{\min \Delta^2 J_{\perp} \cdot 4}{N}$

możemy z stan post spinowe symetryjny  $\psi^{\otimes N}$



$$\xi = \frac{\sqrt{\Delta^2 J_{\perp}}}{|\langle \vec{J} \rangle|} = \frac{\sqrt{\frac{N}{4}}}{\frac{N}{2}} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

parametr symetrii min  $\Delta$

Tego typu stany mogą nam być lepsze precyzyjne niż spiny k. k. (tj. stan Focka).

Symetria więcej się ze splątaniem wiąże.  
(możliwy środek inercji nie w przypadku symetrii)

• One axis-twisting Hamiltonian (BEC, ...)

$$-\frac{1}{2} \theta J_x^2 \quad |\alpha\rangle^{\otimes N}$$



$$\sqrt{\Delta^2 J_{\perp}}$$

1 1

$$e^{-\frac{i}{2}\theta J_x^2} |0\rangle^{\otimes N}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2}{N}} = \frac{1}{N^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}}$$

$\left\{ \begin{array}{l} N \rightarrow \infty \\ \theta \rightarrow 0 \end{array} \right.$

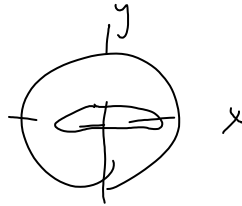
$$\Delta\psi \approx \frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}$$

$$N \gg 1, \theta \ll 1$$

• Two axis-twisting (difficult to implement)

$$e^{-\frac{i}{2}\theta (J_+^2 - J_-^2)} |0\rangle^{\otimes N}$$

$$J_{\pm} = J_x \pm i J_y$$



$$\Delta\psi \approx \frac{1}{N}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{numerator} \\ \end{array} \right\} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Wypraczenie one-axis (moze sie przydac dla dowolnej grupy)  
deformacja...