2. Pomiary uogólnione

Często jest tak, że nie mierzymy bezpośrednio interesującej nas wielkości i pomiar rzutowy nie jest wygodnym opisem.

- pomiar Sterna-Gerlacha. Chcemy mierzyć spin: mamy oddziaływanie spinowych i przestrzennych stopni swobody → pomiar przestrzennych stopni swobody → wnioskowanie o spinowych st. swobody

- pomiar liczby fotonów klasycznym detektorem (wydajność < 100%, ciemne zliczenia) – „pomiar rozmyty". – to że wyświetli się n nie znaczy że zrzutowaliśmy w stan n fotonowy.

Pomiar uogólniony:

- układ oddziałuje z urządzeniem pomiarowym (opisanym kwantowo)
- obserwator mierzy bezpośrednio stan urządzenia pomiarowego (pomiarem rzutowym)

Opis matematyczny:

$$\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M \longrightarrow U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger$$

układ; stan początkowy urządzenia pomiarowego; oddziaływanie z urządzeniem pomiarowym

Na końcu mierzymy urządzenie pomiarowe w pewnej bazie np. $|i\rangle$: pomiar rzutowy $P_i = |i\rangle\langle i|$

Prawdopodobieństwo wyniku i:

$$p_i = \mathrm{Tr}\left(U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \, 1_S \otimes P_i^M \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger 1 \otimes P_i^M U \right) =$$

$= \mathrm{Tr}_S (\rho_S \cdot \underbrace{\langle 0 | U^\dagger \mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i| U |0\rangle}_{\Pi_i^S})$

$= \mathrm{Tr} (\rho_S \Pi_i^S)$

uogólnione op. pomiarowe (nie bawimy nutami)

$\sum_i \Pi_i^S = \mathbb{1}_S \,, \quad \Pi_i^S \geq 0$ (POVM Measurement)

Jawnie
$(\Pi_i^S)_{mn} = \langle m | \langle 0 | U^\dagger \mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i| U |n\rangle |0\rangle$
$= \langle \varphi_m | \mathbb{1} \otimes |i\rangle\langle i| |\varphi_n\rangle \,, \quad |\varphi_n\rangle = U |n\rangle |0\rangle$

Widzimy, że każdemu oddziaływaniu S+M i pomiarom rzutowemu na M odpowiada pewien pomiar uogólniony na S dający te same prawdopodobieństwa.

Prawdziwe jest również tw. odwrotne:

Tw. Neumark'a (szczególny przypadek)

$\{\Pi_i^S\} \,, \quad i = 1 \ldots K \quad \Pi_i^S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_d)$

Pokażemy że istnieje $U \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{d \cdot K})$ rzutory P_i które do

$\forall_{\rho_S} \; \mathrm{Tr}(\rho_S \Pi_i^S) = \mathrm{Tr}(U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes P_i^M)$

Zdefiniujmy: $U |\psi\rangle \otimes |0\rangle = \sum_{i=1}^{K} \sqrt{\Pi_i} |\psi\rangle |i\rangle$

} $\sqrt{\Pi_i} \geq 0$

Spełnia warunek unitarności

$\left(\sum_i \langle \psi' | \langle i | \sqrt{\Pi_i} \right) \left(\sum_j \sqrt{\Pi_j} |\psi\rangle |j\rangle \right) =$

$= \langle \psi' | \sum_i \Pi_i |\psi\rangle = \langle \psi' | \psi \rangle = \mathbb{1}$

Macierz unitarna na podprzestrzeni zawsze może być rozszerzona do pełnej unitarnej:

$\begin{bmatrix} u_1^1 \ldots u_d^1 & \\ \vdots & \end{bmatrix} \quad N = d \cdot K$

$$U = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & ? \\ \vdots & \vdots & \\ u^N_1 & u^N_d & \cdots \end{pmatrix}$$

↑ dopisujemy ortogonalne N-d wektorów

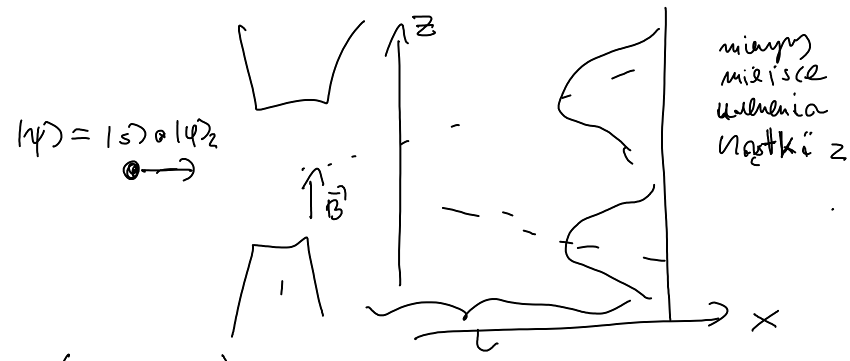
OK.

Czy U jednoznaczne? Nie:

Możemy wziąć $U|\psi\rangle\otimes|0\rangle = \sum_{i=1}^{N} V_i\sqrt{\Pi_i}\,|\psi\rangle|i\rangle$
↑ unitarna

Oznacza że stan po pomiarze nie jednoznaczny.
Zwróćmy uwagę, że w tym przypadku nawet jeśli Π_i ortogonalne to i tak możemy mieć unitarny obrót po pomiarze.
Za istotne zdeformowanie stanu odpowiada $\sqrt{\Pi_i}$ bo V_i odwracalne. Dokładniej później

Przykład Eksperyment Sterna-Gerlacha



$\vec B \approx (B_0 + kz)\vec e_z$ — niejednorodne pole w kierunku z w liniowym przybliżeniu spełnia $\nabla B = 0$

$|s\rangle = c_+\underbrace{|+\tfrac12\rangle_z}_{|+\rangle} + c_-\underbrace{|-\tfrac12\rangle_z}_{|-\rangle}$ — nieznany stan spinu w bazie wektorów osi z

$H = -\mu\,\vec\sigma\cdot\vec B$ (w trakcie oddziaływania)

Oddziaływanie trwa przez krótki czas δt w którym cząstka przelatuje przez pole magnetyczne przy czym przyjmujemy dla uproszczenia że ciągle czuje to samo pole.
Dla uproszczenia przyjmujemy $B_0 = 0$

[illegible] cząstki

$|\varphi\rangle_z$ - opisuje przestrzenną strukturę wiązki w kierunku z pozostałe kierunki nie istotne :

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \int dz\, e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} |z\rangle$$

Paczka falowa o szerokości σ.

$$|\varphi_\pm(\delta t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mu \cdot k\, \sigma_z \cdot z\, \delta t} |\pm\rangle |\varphi\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot |\pm\rangle \otimes \int dz\, e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} \pm \frac{i\mu k \delta t}{\hbar} z} |z\rangle$$

W reprezentacji pędowej :

$$|\varphi_\pm(\delta t)\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} |\pm\rangle \otimes \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\hbar}} \int e^{-\left(\frac{p \pm \mu k \delta t}{\hbar}\right)^2 \sigma^2} |p\rangle\, dp$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{\frac{1}{4}}}}_{N} \cdot |\pm\rangle \otimes \int e^{-\frac{(p \pm \overbrace{\mu k \delta t}^{\alpha})^2}{4\sigma_p^2}} |p\rangle$$

Kop pędu w zależności od spinu

Następnie pozwalamy na swobodną ewolucję przez czas $T = \frac{L}{v}$ } dla uproszczenia T nie zależy od kierunku.

Swobodna ewolucja :

$$|\psi\rangle = \int \psi(p)\, |p\rangle \longrightarrow \int \psi(p)\, e^{-\frac{ip^2}{2m\hbar}T}$$

$$|\psi_\pm(\delta t + T)\rangle = N\, |\pm\rangle \otimes \int e^{-\frac{(p\pm\alpha)^2}{4\sigma_p^2} - \frac{i p^2 T}{2m\hbar}} |p\rangle$$

Wracamy do repr. położeniowej

$$|\psi_\pm(\delta t + T)\rangle =$$

przesunięcie

$$= \left(\frac{\sigma^2}{2\pi\, \sigma_T^4}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot |\pm\rangle \otimes \int e^{-\frac{\left(z \mp \frac{T}{m}\alpha\right)^2}{4\sigma_T^2} \pm \frac{i\alpha z}{\hbar}} |z\rangle$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{N_T}$$

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 + i\frac{Th}{2m} \quad \Big\}\ \text{rozmycie paczki falowej}$$

I teraz mierzymy położenie, aby dowiedzieć się na temat rotacji spinu,

$$(\Pi_z)^n_m = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix} \qquad n, m = \pm$$

$$(\Pi_z)^n_m = \langle \Psi_n(s+T) | \, \mathbb{1} \otimes |z\rangle\langle z| \, | \Psi_m(s+T) \rangle =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \end{array} \right]$$

$$\frac{1}{\sigma_T^2} = \frac{1}{\sigma^2 + \frac{iTh}{2m}} = \frac{\sigma^2 - \frac{iTh}{2m}}{\underbrace{\sigma^4 + \left(\frac{Th}{2m}\right)^2}_{|\sigma_T|^4}}$$

$$(\Pi_z)^+_+ = |N_T|^2 e^{-\frac{\left(z - \frac{T}{m}\alpha\right)^2 \sigma^2}{2|\sigma_T|^4}} \qquad |N_T|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{\pi}\,|\sigma_T^2|}$$

$$(\Pi_z)^-_- = |N_T|^2 e^{-\frac{\left(z + \frac{T}{m}\alpha\right)^2 \sigma^2}{2|\sigma_T|^4}}$$

$$(\Pi_z)^+_- = (\Pi_z)^-_+ = 0$$

$$\Pi_z = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}|\sigma_T^2|}\begin{pmatrix} e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{2\sigma_T^4}\sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{2\sigma_T^4}\sigma^2}\end{pmatrix}$$

$$\int \Pi_z \, dz = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

jest dodatnie: $\Pi_z \geq 0$

Jeśli rozmycie plamki jest zbyt duże $\frac{Tk}{2m} \ll \sigma$ to

$$\Pi_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\begin{pmatrix} e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{2\sigma^2}} & 0\\ 0 & e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{2\sigma^2}}\end{pmatrix}$$

Np. pomiar Π_0 nic nie mówi o spinie bo mamy nie mamy $\propto 1$ wszystkie stany generują taki wynik z równym prawdopodobieństwem.

Jeśli $\frac{T}{m}\alpha \gg \sigma$ wtedy pomiar jednoznaczny $|+\rangle, |-\rangle$

Dowiadujemy się tyle i z pomiaru rzutowego

Jeśli $\frac{T}{m}\alpha \ll \sigma$ wtedy pomiar praktycznie nic nie mówi o wartości spinu

Stan układu po pomiarze uogólnionym

$$\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M \longrightarrow U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger \xrightarrow{\text{pomiar } |i\rangle_M}$$

$$\xrightarrow{1\otimes|i\rangle\langle i|} 1\otimes|i\rangle\langle i|_M\, U \rho_S\otimes|0\rangle\langle 0|_M U^\dagger\, 1\otimes|i\rangle\langle i|_M$$

Stan układu jeśli pomiar dał wynik $|i\rangle\langle i|$

$$\rho_S^{(i)} = Tr_M\left(1\otimes|i\rangle\langle i|_M\, U\rho_S\otimes|0\rangle\langle 0|_M U^\dagger\, 1\otimes|i\rangle\langle i|_M\right) :$$

$$\varrho_S^{(i)} = \mathrm{Tr}_M \left(\mathbb{1}\otimes|i\rangle\langle i|_M \, U \varrho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger \, \mathbb{1}\otimes|i\rangle\langle i|_M \right) =$$

$$= \underbrace{\langle i|U|0\rangle}_{K_i} \varrho_S \underbrace{\langle 0|U^\dagger|i\rangle}_{K_i^\dagger}$$

ślad $= \mathrm{Tr}\,\varrho_S^{(i)} = \mathrm{Tr}(\varrho_S \underbrace{K_i^\dagger K_i}_{\Pi_i}) = p_i$

Stan unormowany: pod warunkiem wyniku i

$$\boxed{\varrho_S^{(i)} = \frac{1}{p_i} K_i \varrho_S K_i^\dagger}, \quad K_i = \underbrace{V_i}_{\text{nie istotne zaburzenie}} \underbrace{\sqrt{\Pi_i}}_{\text{istotne zaburzenie stanu}}$$

Uwaga: Nie mamy własności „Repeatability" bo pomiary nieortogonalne w ogólności!

Jeśli na wejściu stan czysty $\varrho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$ to

$\varrho_S^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|$ $\quad |\psi^{(i)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} K_i|\psi\rangle$

Zauważmy, że zadane $\{\Pi_i\}$ wyznacza $\{K_i\}$ jedynie z dokładnością do unitarnej $K_i \circ U_i$

Intuicyjne – wyślijmy wynik pomiaru można unitarnie obrócić stan po pomiarze – nie zmieni to statystyki

Dekoherencja

Jeśli układ z którym oddziałuje układ to nie urządzenie pomiarowe – nie mamy dostępu do wyniku pomiaru, sum...

Wtedy stan układu:

$$\varrho_S^{out} = \sum_i K_i \varrho_S K_i^\dagger = \quad , \quad \sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$$

$$= \mathrm{Tr}_M(U \varrho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger)$$

Ogólna postać ewolucji układu w kontakcie z otoczeniem. CP – mapa.

W ogólności stan czysty → mieszany

Szczególny przypadek $\varrho_S^{out} = U \varrho_S U^\dagger$ ew. unitarna

Przykład

Opisz stan spinowy cząstki w exp. S-G przy założeniu braku dostępu do przestrzennych stopni swobody

$$|+\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} |+\rangle|\psi_+\rangle$$
$$|-\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} |-\rangle|\psi_-\rangle$$

$$\rho_S^{out} = Tr_M(U\, \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|\, U^+) =$$

$$= Tr_M\big(\rho_{++}|+\rangle\langle+| \otimes |\psi_+\rangle\langle\psi_+| + \rho_{--}|-\rangle\langle-| \otimes |\psi_-\rangle\langle\psi_-|$$
$$\rho_{+-}|+\rangle\langle-| \otimes |\psi_+\rangle\langle\psi_-| + \rho_{-+}|-\rangle\langle+| \otimes |\psi_-\rangle\langle\psi_+|\big)$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_{++} , & \rho_{+-}|\langle\psi_-|\psi_+\rangle|^2 \\ |\langle\psi_+|\psi_-\rangle|^2\rho_{-+}, & \rho_{--} \end{pmatrix}$$

Tu nie ma nic mówione jakie wielkości T - długi składowe się nie zmieniają możemy wziąć T=0:

$$\rho_S^{out} = \begin{bmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_p^2}} \\ \rho_{-+}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_p^2}} & \rho_{--} \end{bmatrix} \qquad \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

Dekoherencja tym silniejsza im większa zmiana pędu w porównaniu z rozrzutem pędu