Wyklad 7 - quantum CR

3 grudnia 2012
11:22

III Kwantowa teoria estymacji

Dotychczas szukaliśmy estymatorów, żeby rozróżnić od siebie rozkłady prawdopodobieństwa $p_\theta(x)$

Teraz zastąpimy:

$$p_\theta(x) \longrightarrow \rho_\theta$$

rodzina stanów kwantowych zależna od parametru(ów) θ.

Żeby estymować, musimy najpierw wykonać pomiar!

$$\rho_\theta \xrightarrow{\{\Pi_x\}} p_\theta(x) \qquad \Big\{ \sum_x \Pi_x = \mathbb{1},\ \Pi_x \geq 0$$

op. pomiarowe

gdzie $p_\theta(x) = \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)$

i teraz mamy już klasycznie.

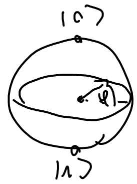
$$\theta \xrightarrow{p_\theta(x)} x \longrightarrow \tilde{\theta}(x)$$

Mamy „dwa razy" trudniej: musimy znaleźć zarówno optymalny pomiar jak i estymator.

$$\boxed{\text{Kwantowa teoria estymacji = Klasyczna teoria estymacji + poszukiwanie optymalnego pomiaru}}$$

Przykład

Qubit na równiku sfery Blocha $|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right)$



Otrzymujemy N kopii: $\rho_\varphi^{(N)} = \left(|\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|\right)^{\otimes N}$

Jaki wybrać pomiar i estymator, żeby optymalne–

Jak wybrać pomiar i estymator, żeby optymalnie poznać φ. Rozważmy na razie $N=1$:

a) pomiar $\Pi_0=|0\rangle\langle 0|$, $\Pi_1=|1\rangle\langle 1|$

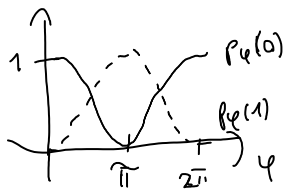
$p_\varphi(0)=\frac{1}{2}$ $\quad p_\varphi(1)=\frac{1}{2}$ ~ brak czułości na φ, kiepski pomysł

b) pomiar $\Pi_0=|+\rangle\langle+|$ $\quad \Pi_1=|-\rangle\langle-|$, $\quad |\pm\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\pm|1\rangle)$

$p_\varphi(0)=|\langle+|\psi_\varphi\rangle|^2=\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)$

$p_\varphi(1)=\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)$

$p_\varphi(x)=\frac{1}{2}\left(1+(-1)^x\cos\varphi\right)$ $\quad x=0,1$



Niby dobrze, ale mamy niejednoznaczność $\varphi \longleftrightarrow 2\pi-\varphi$

Umówmy się, że nie przejmujemy się i ograniczamy się do $\varphi\in[0,\pi]$

Co mówi nierówność C-R na temat najlepszego estymatora:

$$\Delta\tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{F}} \qquad F=\frac{2}{1+\cos\varphi}\frac{\sin\varphi^2}{4}+\frac{2}{1-\cos\varphi}\frac{\sin^2\varphi}{4}=$$

$$=\frac{\sin^2\varphi}{2}\left(\frac{2}{1-\cos^2\varphi}\right)=1$$

Wiemy, że w granicy $N\to\infty$ możemy mieć precyzję $\Delta\tilde{\varphi}\approx\frac{1}{\sqrt{N}}$ jeśli użyjemy ML

Ale dla skończonych N nie ma gwarancji uzyskania:

$$\frac{d}{d\varphi}\log\frac{1}{2}\left(1-\cos\varphi\,(-1)^x\right)=\frac{1}{1-\cos\varphi\,(-1)^x}(-1)^x\sin\varphi =$$

$$\neq \lambda(\varphi)\left(\tilde{\varphi}(x)-\varphi\right)$$

Pytania:

— Czy można uzyskać lepszą asymptotyczną estymację niż $\frac{1}{\sqrt{N}}$ jeśli użyć najogólniejsze pomiary - kolektywne $\sum_i \Pi_i^{(N)}=\mathbb{1}_{2^N}$

~ jaki optymalny pomiar dla skończonych N?

1. Kwantowe ograniczenie Cramera-Rao

Mając ρ_θ, chcemy uzyskać ograniczenie na precyzję $\Delta\tilde{\theta}$, działające dla danych pomiarów i estymatorów nieobciążonych (lokalnie).

Jeśli wykonujemy pomiar Π_x, $\int dx\, \Pi_x = \mathbb{1}$ to

(*) $p_\theta(x) = Tr(\Pi_x \rho_\theta)$

Wiemy, że klasyczna informacja Fishera:

$$F = \int dx \frac{1}{p_\theta(x)} \left(\frac{dp_\theta(x)}{d\theta}\right)^2 \quad i \quad \Delta\tilde{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F}}$$

Wstawmy (*):

$$F = \int dx \frac{1}{Tr(\Pi_x \rho_\theta)} \left(\frac{d\, Tr(\Pi_x \rho_\theta)}{d\theta}\right)^2 =$$

$$= \int dx \frac{1}{Tr(\Pi_x \rho_\theta)} \left[Tr\left(\Pi_x \frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)\right]^2$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\frac{d\rho_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2}\left[\Lambda^{(\theta)} \rho_\theta + \rho_\theta \Lambda^{(\theta)}\right]$$

Λ_θ pewien operator w ogólności zależny od θ (SLD - symmetric logarithmic derivative)

Możemy zapisać jawnie:
Niech $|i\rangle^{(\theta)}$ - baza własna $\rho_\theta = \sum_i p_i^{(\theta)} |i\rangle^{(\theta)}\langle i|$
W tej bazie:

$$\left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left[\Lambda_{ij} p_j + p_i \Lambda_{ij}\right]$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{2}{p_i + p_j} \left(\frac{d\rho_\theta}{d\theta}\right)_{ij}, \quad \Lambda \text{ - op. hermitowski}$$

$$F = \int dx \frac{1}{Tr(\Pi_x \rho_\theta)} \left[Tr\left[\frac{1}{2}\Pi_x (\Lambda \rho_\theta + \rho_\theta \Lambda)\right]\right]^2 =$$

$$F = \int dx \, \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)} \left[\mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2} \Pi_x \left(\Lambda \rho_\theta + \rho_\theta \Lambda \right) \right] \right]^2 =$$

$$\left\{ \mathrm{Tr}\left(A(BC + CB) \right) = \mathrm{Tr}\left(ABC + (ABC)^\dagger \right) \right.$$

$$= \int dx \, \frac{1}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)} \left(\mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}\left[\Pi_x \Lambda \rho_\theta \right] \right)^2 \leq$$

$$\leq \int dx \, \frac{\left| \mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta) \right|^2}{\mathrm{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \mathrm{Tr}(A B^\dagger) \right|^2 \leq \mathrm{Tr}(A^\dagger A)\, \mathrm{Tr}(B^\dagger B) \\ A = \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\theta} \qquad B = \sqrt{\Pi_x}\, \Lambda \sqrt{\rho_\theta} \end{array} \right.$$

$$\leq \int dx \, \frac{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x) \cdot \mathrm{Tr}\left(\sqrt{\rho_\theta} \Lambda \Pi_x \Lambda \sqrt{\rho_\theta} \right)}{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_\theta \Lambda \int dx \, \Pi_x \Lambda \right) = \mathrm{Tr}\left(\rho_\theta \Lambda^2 \right) =: F_Q$$

F_Q - kw. inf. Fishera zależy tylko od ρ_θ a nie od pomiaru

Zwróćmy uwagę na podobieństwo

$$F_Q = \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2) = \langle \Lambda^2 \rangle$$

gdzie Λ - symmetric log. derivative

$$F = \left\langle \left(\frac{d}{d\theta} \log p_\theta(x) \right)^2 \right\rangle$$

log derivative

$$\boxed{\Delta \tilde{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F_Q}}} \qquad F_Q = \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2)$$

Kwantowa nierówność C-R.

1.1 Addytywność F_Q

$$\varrho_\theta^{(12)} = \varrho_\theta^{(1)} \otimes \varrho_\theta^{(2)}$$

$$\frac{d\varrho_\theta^{(12)}}{d\theta} = \frac{d\varrho_\theta^{(1)}}{d\theta} \otimes \varrho_\theta^{(2)} + \varrho_\theta^{(1)} \otimes \frac{d\varrho_\theta^{(2)}}{d\theta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\Lambda_1 \varrho_\theta^{(1)} + \varrho_\theta^{(1)} \Lambda_1\right) \otimes \varrho_\theta^{(2)} + \varrho_\theta^{(1)} \otimes \frac{1}{2}\left[\Lambda_2 \varrho_\theta^{(2)} + \varrho_\theta^{(2)} \Lambda_2\right]$$

czyli $\Lambda_{12} = \Lambda_1 \otimes I + I \otimes \Lambda_2$

$$F_Q^{(12)} = \mathrm{Tr}\left(\varrho_\theta^{(1)} \otimes \varrho_\theta^{(2)} \Lambda_{12}^2\right) = F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)} + 2\mathrm{Tr}\left(\varrho_\theta^{(1)} \otimes \varrho_\theta^{(2)} \cdot \Lambda_1 \otimes \Lambda_2\right)$$

$= F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)}$ bo $\mathrm{Tr}(\varrho \cdot \Lambda) = 0$

$\left\{ \frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{1}{2}(\Lambda\varrho + \varrho\Lambda) \qquad \frac{d\,\mathrm{Tr}\varrho}{d\theta} = \mathrm{Tr}(\varrho\Lambda) = 0 \right.$

Jeśli $\varrho_\theta^{(N)} = \varrho_\theta^{\otimes N}$ $\quad F_Q^{(N)} = N \cdot F_Q$

Zwróćmy uwagę, że w $F_Q^{(N)}$ mogą być dowolne pomiary kolektywne.

1.2 Stany czyste

$$\varrho_\theta = |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|$$

$$\frac{d}{d\theta}|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta| = |\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|$$

$\left\{ |\psi_\theta'\rangle = \frac{d}{d\theta}|\psi_\theta\rangle \right.$ - nieunormowany wektor

Możemy napisać $\Lambda = 2\left(|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\right)$

Sprawdźmy?

$$\frac{1}{2}\left[\Lambda |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\Lambda\right] =$$

$$= 2\,\frac{1}{2}\left[|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + \underbrace{|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|}\right.$$

$$\left. + \underbrace{|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta|} + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\right] =$$

$$= \frac{d\,|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|}{d\theta} \qquad \text{ok}$$

$$F_Q = \mathrm{Tr}\left(|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\, \Lambda^2\right) =$$

$$= 4\langle\psi_\theta| \left(|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\right)^2 |\psi_\theta\rangle =$$

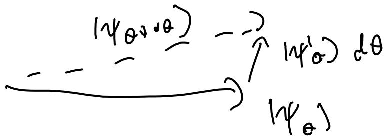
$$= 4\langle\psi_\theta| \Big(|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta'| + |\psi_\theta'\rangle\langle\psi_\theta'| + |\psi_\theta\rangle\langle\psi_\theta|\,\langle\psi_\theta'|\psi_\theta'\rangle \Big)|\psi_\theta\rangle$$

$$= 4\left(\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle^2 + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle^2 + |\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle|^2 + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta'\rangle \right)$$

$$\begin{cases} \left(\langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle\right)^2 = 0 \\ \langle\psi_\theta|\psi_\theta'\rangle^2 + \langle\psi_\theta'|\psi_\theta\rangle^2 + |\langle\psi'|\psi_\theta\rangle|^2 = -|\langle\psi'|\psi_\theta\rangle|^2 \end{cases}$$

$$\boxed{F_Q = 4\left(\langle\psi'_\theta|\psi'_\theta\rangle - |\langle\psi'_\theta|\psi\rangle|^2 \right)}$$

Intuicja:



Im większe $|\psi'_\theta\rangle$ tym lepiej, ale nie w kierunku $|\psi_\theta\rangle$

Przykład

$$|\psi_t\rangle = e^{-\frac{iH\cdot t}{\hbar}}|\psi\rangle$$ chcemy estymować czas ewolucji

$$F_Q = \frac{4}{\hbar^2}\left(\langle\psi|H^2|\psi\rangle - |\langle\psi|H|\psi\rangle|^2 \right) =$$

$$= 4\,\Delta^2 H$$

$$\Delta\tilde{t} \geq \frac{\hbar}{\sqrt{4\Delta^2 H}}$$

$$\Delta^2\tilde{t}\cdot\Delta^2 H \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

„Zasada nieoznaczoności" czas – energia.

H – operator, T – estymator

} jedyny sensowny postać bo nie ma operatora czasu

<u>Przykład</u>

$$|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right)$$

$$|\psi_\varphi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\, i\, e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$F_Q = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1$$

Czyli jeśli mielibyśmy $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N}$ to

$$F_Q^{(N)} = N \quad \Rightarrow \quad \Delta\tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

to pokazuje, że asymptotyczne pomiar lokalny w bazie $|+\rangle, |-\rangle$ byłby optymalny.

1.3 Wysycenie kwantowego C-R (QCR)

Czy zawsze jest pomiar Π_x, który w kwantowej części wyprowadzenia da wysycenie równości. $\forall x$:

$$(*) \quad \left|\mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)\right| = \left|\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)\right|$$

$$(**) \quad \left|\mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)\right|^2 = \mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta}\right)^\dagger \sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta}\right) \cdot \mathrm{Tr}\left(\left(\sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}\right)^\dagger \left(\sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}\right)\right)$$

Warunek (**): $\sqrt{\Pi_x}\sqrt{\rho_\theta} = \lambda \sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}$

jeśli dodatkowo $\lambda \in \mathbb{R}$ to

$$\left|\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}(\Pi_x\Lambda\rho_\theta)\right| = \left|\mathrm{Re}\,\mathrm{Tr}\left(\sqrt{\rho_\theta}\sqrt{\Pi_x}\sqrt{\Pi_x}\Lambda\sqrt{\rho_\theta}\right)\right| =$$

$$= \left|\lambda\,\mathrm{Tr}\left(\sqrt{\rho_\theta}\,\Lambda\,\Pi_x\Lambda\sqrt{\rho_\theta}\right)\right| = \left|\mathrm{Tr}(\Pi_x\Lambda\rho_\theta)\right| \quad \boxtimes$$

Jeśli weźmiemy $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$ gdzie $|x\rangle$ baza własna Λ

to $$|x\rangle\langle x|\sqrt{\rho_\theta} = \lambda\,\Lambda\,|x\rangle\langle x|\sqrt{\rho_\theta} = \underbrace{\lambda\,\rho_x}_{\lambda'_x}|x\rangle\langle x|\sqrt{\rho_\theta}$$

Czyli ok.

Pomiarem wysycającym QCR jest pomiar w bazie własnej SLD_x ale uwaga to może zależeć od θ wtedy nie jest oczywiste jak to zastosować.

Przykład

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right) \qquad |\psi'\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}|1\rangle$$

$$\Lambda = 2\left(|\psi'\rangle\langle\psi| + |\psi\rangle\langle\psi'|\right) =$$

$$= 2\left(\frac{i}{2}e^{i\varphi}|1\rangle\left(\langle 0| + e^{-i\varphi}\langle 1|\right) - \frac{i}{2}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right)e^{-i\varphi}\langle 1|\right)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -ie^{-i\varphi} \\ ie^{i\varphi} & 0 \end{bmatrix}$$

Czyli baza własna:

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + ie^{i\varphi}|1\rangle\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - ie^{i\varphi}|1\rangle\right)$

Nam się udało z inną $|\alpha\rangle, |1\rangle$, ale widać że z tych też by było dobrze

(okazuje się że będzie ok dla dowolnej pary wektorów ortogonalnych na równiku sfery Blocha więc tutaj pomiar nie musi zależeć od φ $\boxtimes$)

1.4 Wieloparametrowe QCR

$\rho_{\vec{\theta}}$, $\quad \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k)$

Klasycznie mieliśmy:

$$C \geq F^{-1} \qquad F_{ij} = \int dx \frac{1}{p_\theta(x)} \frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta_i} \frac{\partial p_\theta(x)}{\partial \theta_j}$$

macierz kowariancji, macierz Fishera

Powtarzamy dowód kwantowy z tym że mamy k różnych SLD:

$$\frac{d \rho_{\vec{\theta}}}{d \theta_i} = \frac{1}{2}\left(\Lambda_i \rho_{\vec{\theta}} + \rho_{\vec{\theta}} \Lambda_i \right)$$

Kwantowa macierz Fishera:

$$(F_Q)_{ij} = \mathrm{Tr}\left[\rho_{\vec{\theta}} \tfrac{1}{2}(\Lambda_i \Lambda_j + \Lambda_j \Lambda_i) \right]$$

$$\boxed{C \geq F_Q^{-1}}$$

kwantowa wieloparametrowa nierówność C-R

$$F_{ij} = \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} \left(\mathrm{Tr}\, \Pi_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \right) \cdot \mathrm{Tr}\left(\Pi_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} \right)$$

$$= \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} \left(\mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda_i \rho) \right) \cdot \left(\mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda_j \rho) \right)$$

$$\langle \alpha | F | \alpha \rangle = \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}\, \rho_\theta \Pi_x} \left(\sum_i \alpha_i \, \mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}(\Pi_x \Lambda_i \rho) \right)^2$$

$$= \int dx \frac{1}{\mathrm{Tr}\, \rho_\theta \Pi_x} \left(\mathrm{Re}\, \mathrm{Tr}\left(\sum_i \alpha_i \Pi_x \Lambda_i \rho \right) \right)^2 \leq$$

$$\leq \int dx \frac{\left| \mathrm{Tr}\left(\sum_i \alpha_i \Pi_x \Lambda_i \rho \right) \right|^2}{\mathrm{Tr}\, \rho \Pi}$$

$$A = \sqrt{\rho} \sqrt{\Pi} \qquad B = \sum_i \alpha_i \sqrt{\Pi} \Lambda_i \sqrt{\rho}$$

$$\leq \int dx \, \mathrm{Tr}\left(\sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \sqrt{\rho} \Lambda_i \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\Pi_x} \Lambda_j \sqrt{\rho} \right) =$$

$$= \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \, \mathrm{Tr}(\rho \Lambda_i \Lambda_j) = \langle\alpha| \mathrm{Tr}\left(\rho \tfrac{1}{2}(\Lambda_i\Lambda_j + \Lambda_j\Lambda_i)\right) |\alpha\rangle$$

$$F \leq F_Q$$

W ogólności jeśli Λ_i i Λ_j nie komutują nie ma potrzeby ... ... QCR.

Metryka Buresa

Kwantowa inf. Fishera jako miara rozróżnialności stanów, może posłużyć do stworzenia „naturalnej" metryki na macierzach gęstości.

- Odległość infinitezymalna:

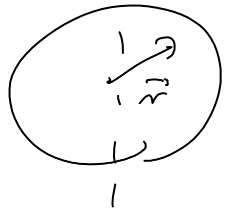
$$d_B(\rho, \rho + d\rho)^2 = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}(\rho \Lambda^2),$$

gdzie
$$d\rho = \frac{1}{2}(\Lambda\rho + \rho\Lambda)$$

W ogólności trudno podać jawną postać.

Przykład Qubit

Kula Blocha



$$\rho = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Piszemy $\Lambda = \lambda_x \sigma_x + \lambda_y \sigma_y + \lambda_z \sigma_z + \lambda_I \mathbb{1}$ i ...

$$d_B^2 \rho = \frac{1}{4}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{(x\,dx + y\,dy + z\,dz)^2}{1 - (x^2+y^2+z^2)} \right)$$

Lepiej widać w parametryzacji kątowej

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \sin\theta \cos\varphi \\ r \sin\theta \sin\varphi \\ r \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\left[dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + \frac{r^2 dr^2}{1-r^2} \right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \right]$$

rozróżnialność stanów rośnie tym szybciej im bliżej brzegu

<u>Fakt</u>:

$$\mathcal{F}(\rho_1, \rho_2) = \left[\mathrm{Tr}\left(\sqrt{\sqrt{\rho_1}\,\rho_2\,\sqrt{\rho_1}}\right)\right]^2 \text{ - Fidelity}$$

$$\mathcal{F}(\rho_\varphi, \rho_{\varphi+d\varphi}) = 1 - \frac{1}{4} F(\rho_\varphi)\, d\varphi^2$$

<u>Proof</u>:

We can relate F to fidelity $\mathcal{F}$

$$\sqrt{\mathcal{F}(\rho_\varphi, \rho_{\varphi+d\varphi})} = \mathrm{Tr}\left(\left[\rho_\varphi^{\frac{1}{2}}\, \rho_{\varphi+d\varphi}\, \rho_\varphi^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$\left\{ \rho_{\varphi+d\varphi} = \rho_\varphi + \dot{\rho}_\varphi \cdot d\varphi \right.$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\left[\rho_\varphi^{\frac{1}{2}}\left(\rho_\varphi + \dot{\rho}_\varphi d\varphi\right)\rho_\varphi^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\left[\rho_\varphi^2 + \rho_\varphi^{\frac{1}{2}}\dot{\rho}_\varphi \rho_\varphi^{\frac{1}{2}} d\varphi\right]^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$\left\{ \dot{\rho}_\varphi = \frac{1}{2}\left(\rho_\varphi \Lambda + \Lambda \rho_\varphi\right) \right. \quad SLD \qquad \left\{ (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \right.$$

Expand to the 2-nd order:

$$\left[\rho_\varphi^2 + \rho_\varphi^{\frac{1}{2}}\dot{\rho}_\varphi \rho_\varphi^{\frac{1}{2}} d\varphi\right]^{\frac{1}{2}} = \rho_\varphi + A\, d\varphi + B\, d\varphi^2$$

$$\begin{cases} \rho_\varphi A + A \rho_\varphi = \rho_\varphi^{\frac{1}{2}} \dot{\rho}_\varphi \rho_\varphi^{\frac{1}{2}} \\ A^2 + \rho_\varphi B + B \rho_\varphi = 0 \end{cases}$$

$$p_i A_{ij} + A_{ij} p_j = \sqrt{p_i}\, \dot{\varrho}_{ij} \sqrt{p_j}$$

$$A_{ij} = \frac{\sqrt{p_i p_j}}{p_i + p_j} \dot{\varrho}_{ij} \Rightarrow \mathrm{Tr}\, A = 0$$

$$(A^2)_{ij} + B_{ij}(p_i + p_j) = 0$$

$$(A^2)_{ij} = \sum_k A_{ik} A_{kj} = -B_{ij}(p_i + p_j)$$

$$B_{ij} = - \frac{\sum_k A_{ik} A_{kj}}{p_i + p_j} = -\frac{1}{p_i + p_j} \cdot \sum_k \frac{\sqrt{p_i p_k}}{p_i + p_k} \dot{\varrho}_{ik} \frac{\sqrt{p_k p_j}}{p_k + p_j} \dot{\varrho}_{kj}$$

$$\mathrm{Tr}\, B = -\sum_{ik} \frac{1}{2p_i} \frac{p_i p_k}{(p_i + p_k)^2} |\dot{\varrho}_{ik}|^2$$

$$\sqrt{F} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{p_k}{(p_i + p_k)^2} (\dot{\varrho}_{ik})^2$$

$$\dot{\varrho} = \frac{1}{2}(\Lambda \varrho + \varrho \Lambda) \qquad \dot{\varrho}_{ik} = \frac{1}{2}(\Lambda_{ik} p_k + p_i \Lambda_{ik}) =$$

$$= \frac{1}{2} \Lambda_{ik} (p_i + p_k)$$

$$\sqrt{F} = 1 - \frac{1}{8} \sum_{ik} p_k |\Lambda_{ik}|^2 = 1 - \frac{1}{8} \underbrace{\mathrm{Tr}(\varrho \Lambda^2)}_{F}$$

$$F \approx 1 - \frac{1}{4} F$$

Fakt:

Bures angle

$$D_A = \int^{\varrho_2} d_B \varrho = \arccos \sqrt{F(\varrho_1, \varrho_2)}$$

$\acute{s}_1$
z po geodezyjnej

Fakt:

$$F(\rho_\varphi^{(S)}) = \min_{\substack{|\Psi_\varphi^{(SE)}\rangle \\ \rho_\varphi = \mathrm{Tr}_E |\Psi_\varphi\rangle\langle\Psi_\varphi|}} F(|\Psi_\varphi^{(SE)}\rangle)$$

Konsekwencja tego że Uhlmann Fidelity to

$$\mathcal{F}(\rho_1,\rho_2) = \max_{\substack{|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle \\ \rho_i = \mathrm{Tr}_E(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|)}} |\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle|^2$$

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\varphi\rangle} |\langle\psi|\varphi\rangle|^2$$

where $\rho = \mathrm{Tr}_E|\psi\rangle\langle\psi|$, $\sigma = \mathrm{Tr}_E|\varphi\rangle\langle\varphi|$

Proof

$|\psi\rangle_{SE}^{i\alpha} \longrightarrow (A_\psi)^i{}_\alpha$ Purification as a matrix

$\rho = \mathrm{Tr}_E |\psi\rangle\langle\psi|$

$$\rho^i{}_j = \sum_\alpha \psi^{i\alpha}\psi^*_{j\alpha} = \sum_\alpha A^i{}_\alpha A^{*j}{}_\alpha = (AA^\dagger)^i{}_j$$

$\rho = AA^\dagger$

We can reformulate the theorem:

$$\mathcal{F}(\rho,\sigma) = \max_{A,B} |\mathrm{Tr}(AB^\dagger)|^2 \qquad \begin{array}{l}\rho = AA^\dagger \\ \sigma = BB^\dagger\end{array}$$

$\parallel$

$$\mathrm{Tr}(|\rho^{\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{1}{2}}|)^2$$

Different purification correspond to $A' = A\cdot U$.

Different purification correspond to $A' = A \cdot U$

Let us take polar decomposition of A

$$A = \rho^{\frac{1}{2}} U \qquad B = \sigma^{\frac{1}{2}} V$$

$$\left| \mathrm{Tr}\left(A B^{\dagger} \right) \right| = \left| \mathrm{Tr}\left(\rho^{\frac{1}{2}} U V \sigma^{\frac{1}{2}} \right) \right| =$$

$$= \left| \mathrm{Tr}\left(\sigma^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} U V \right) \right| \leq \mathrm{Tr}\left(\left| \sigma^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \right| \right) = \sqrt{F}$$

Saturated when $UV = \mathbb{1}$. ∎