Wyklad9 - quantum metrology

16 stycznia 2013
22:27

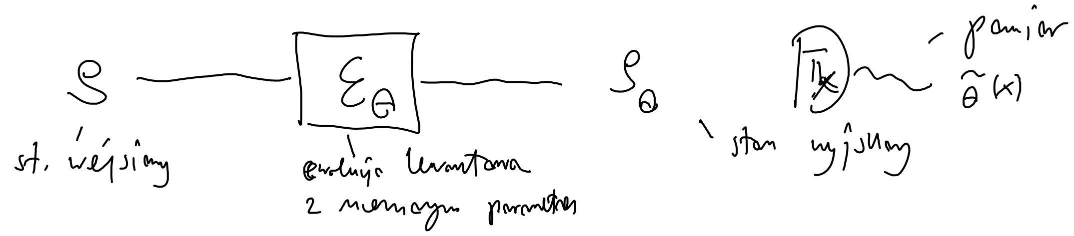
IV Metrologia kwantowa

Wykorzystanie nieklasycznych własności światła, atomów tj. np. splątanie, do zwiększenia precyzji pomiarów podstawowych wielkości fizycznych: odległości, czas, pole magnetyczne, ...

- interferometry fal grawitacyjnych (stany ściśnięte światła)
- zegary atomowe (kilka jonów w st. splątanych)

1. Estymacja parametru kanału kwantowego

Większość problemów w metrologii kwantowej sprowadza się do estymacji parametru kanału kwantowego



Ogólnie:

$$\rho_\theta = \mathcal{E}_\theta(\rho) = \sum_i K_i^\theta \rho K_i^{\dagger\theta}$$

My się na razie skupimy na kanałach unitarnych

$$\mathcal{E}_\varphi(\rho) = U_\varphi \rho U_\varphi^\dagger, \quad U_\varphi = e^{iH\varphi}$$

Estymacja parametru ewolucji φ (faza), H - hamiltonian

Problem: znajdź ρ, $\{\Pi_x\}$, $\tilde{\varphi}(x)$ żeby zminimalizować $\delta\varphi$

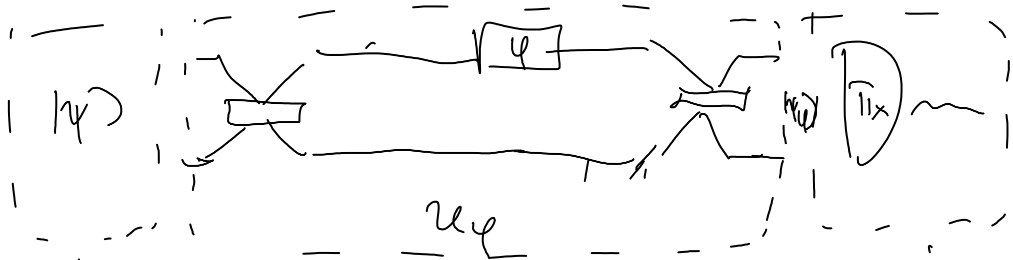
Zawsze lepiej brać st. czyste na wejściu $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$

Problem: $\boxed{\min_{|\psi\rangle, \Pi_x, \tilde{\varphi}} \Delta\varphi}$

W porównaniu z estymacją stanu dodatkowa trudność

– wybór optymalnego stanu wejściowego

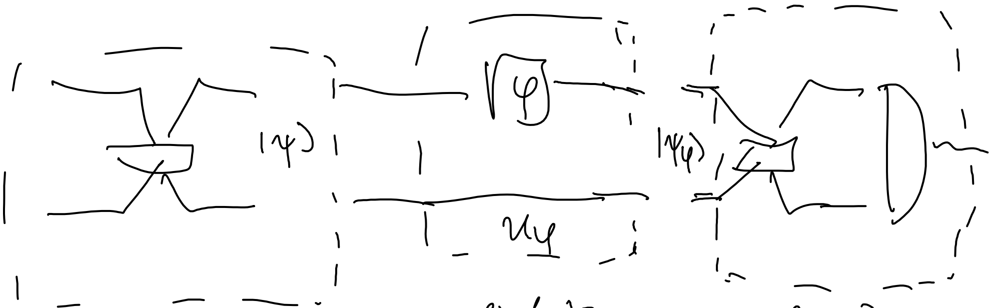
Przykład Interferometr (jeden foton)



stan wejściowy ewolucja pomiar

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$ – superpozycja fotonu w górnym, dolnym ramieniu

wygodniej myśleć



przygotowanie stanu ewolucja pomiar

$U_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ w bazie $|0\rangle, |1\rangle$

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \xrightarrow{U_\varphi} |\psi_\varphi\rangle = a e^{i\varphi}|0\rangle + b|1\rangle$

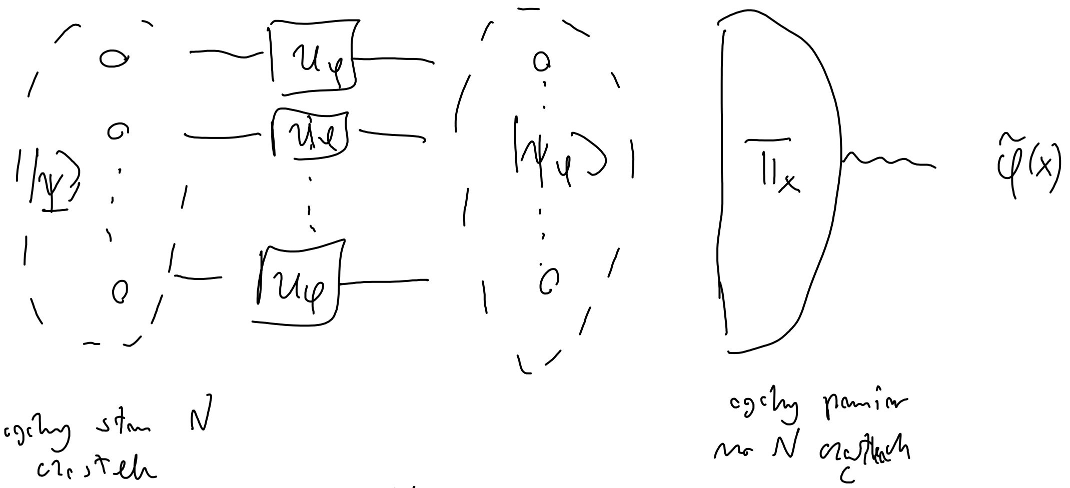
Jaki stan wejściowy najlepszy:

stan z równika sfery Blocha $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$

2. Estymacja parametru na N równoległych kanałach

W praktyce interesują nas precyzje osiągane przy pomiarze wielu układów kwantowych i fotonów, atomów np. interferometria ze światłem o wysokiej (średniej) energii — liczbie fotonów.

Mamy N układów próbkujących, które możemy przygotować w dowolnym stanie kwantowym i puszczamy przez równoległe kanały:



$$|\Psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\otimes N} |\Psi\rangle$$

$$p(x|\varphi) = \langle \Psi_\varphi | \Pi_x | \Psi_\varphi \rangle$$

- Jakie są optymalne stany ~~na~~ wejściu i
- Jakiego zysku możemy się spodziewać w porównaniu ze strategią „klasyczną": $|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$

Rozważmy kanały postaci $U_\varphi = e^{iH\varphi}$

2.1 Podejście przez kwantową inf. Fishera

Wiemy że mając rodzinę stanów $|\Psi_\varphi\rangle$ -
w stanie uzyskać lepszej estymacji niż

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{F}} \qquad F = 4\left(\langle\dot\psi_\varphi|\dot\psi_\varphi\rangle - \langle\psi_\varphi|\dot\psi_\varphi\rangle\right)$$

$$|\Psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\otimes N}|\Psi\rangle = \left(e^{iH\varphi}\right)^{\otimes N}|\Psi\rangle =$$

$$= e^{i\sum_{k=1}^{N} H^{(k)}\varphi}|\Psi\rangle = e^{iH_N\varphi}|\psi\rangle$$

$$\Big\{ H^{(k)} = \mathbb{1}\otimes\ldots\otimes \underset{\text{k-te miejsce}}{H} \otimes\ldots\mathbb{1}, \qquad H_N = \sum_{k=1}^{N} H^{(k)}$$

$$F = 4\left(\langle\psi_\varphi|H_N^2|\psi_\varphi\rangle - \left(\langle\psi_\varphi|H_N|\psi_\varphi\rangle\right)^2\right) =$$

$$= 4\,\Delta^2 H_N$$

Szukamy stanu który zapewni największą wariancję Hamiltonianu H_N.

<u>Fakt</u> Maksymalną wariancję H uzyskamy biorąc superpozycję stanów odpowiadających skrajnym wart. własnym

$$|\psi^{opt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\lambda^{min}\rangle + |\lambda^{max}\rangle\right)$$

$$\Big\{ \langle\psi|H^2|\psi\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(\lambda^{max\,2} + \lambda^{min\,2}\right) - \frac{1}{4}\left(\lambda^{max}+\lambda^{min}\right)^2$$

Wtedy: $\Delta^2 H = \frac{1}{4}\left(\lambda^{max} - \lambda^{min}\right)^2$

Jeśli λ^{max} to max H to max H_N

$$\lambda_N^{max} = N\cdot\lambda^{max}$$

Czyli optymalny stan $|\Psi^{opt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{|\lambda^{max}\rangle\otimes\ldots|\lambda^{max}\rangle + |\lambda^{min}\rangle\otimes\ldots\otimes|\lambda^{min}\rangle}_{\text{stan splątany}}\right)$

Czyli $F = 4N^2 \Delta^2 H$

$$\boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{2N\Delta H}}$$

skalowanie precyzji $\frac{1}{N}$

(skalowanie Heisenberga)

Jeśli by nie używać splątania tylko wejść

$|\Psi\rangle = |\psi^{opt}\rangle^{\otimes N}$ to

$$\Delta^2 H_N = \sum_k \Delta^2 H = N \cdot \Delta^2 H = N \frac{1}{4} (\lambda^{max} - \lambda^{min})^2$$

$$\boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{2\sqrt{N}\Delta H}}$$

skalowanie „klasyczne"

<u>Przykład</u> N fotonów w interferometrze

$$U = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} \lambda_{max} = 1 \\ \lambda_{min} = 0 \end{array}$$

$$|\Psi^{opt}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|11\ldots1\rangle + |00\ldots0\rangle \right)$$

$$\Delta^2 H = \frac{1}{4} \qquad \boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{N}}$$

Gdyby użyć fotonów nie skorelowanych

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N} \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\boxed{\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

Mamy kwadratowy potencjalny zysk w precyzji. Intuicyjnie:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0 0 \dots 0\rangle + |1 \dots 1\rangle\right) \xrightarrow{U_\varphi^{\otimes N}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{iN\varphi}|0\dots 0\rangle + |1\dots 1\rangle\right)$$

N krotnie mnożona faza

Dalej mówiąc o interferometrze optycznym będziemy używać nierozróżnialnych fotonów – zsymetryzować stany i pracować w bazie obsadzeń $|n, N-n\rangle$ – n fotonów w stanie $|0\rangle$, $N-n$ w stanie $|1\rangle$

W takim języku:

- stan optymalny $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|N, 0\rangle + |0, N\rangle\right)$ (NOON)

- stan „klasyczny", brak korelacji między fotonami!

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2^N}\sum_{n=0}^{N} \sqrt{\binom{N}{n}}\, |n, N\rangle \equiv \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)\right)^{\otimes N}$$

Uwaga Nie jest z góry oczywiste jak w praktyce osiągnąć $\Delta\varphi = \frac{1}{N}$. NOON jest dobry tylko gdy już mamy bardzo dobrą wiedzę o φ strategia etapowa.

2.2 Podejście Bayesowskie

optymalne stany do estymacji fazy przy braku wiedzy apriori

Rozważmy ogólne stany N-fotonowe (fotony nierozróżnialne)

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n, N-n\rangle =: \sum_n c_n |n\rangle$$

$$|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{sym}|\psi\rangle = \sum_n c_n e^{in\varphi}|n\rangle$$

Rozkład a priori $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$, f. kosztu $C(\varphi,\tilde\varphi) = 4\sin^2\left(\frac{\varphi-\tilde\varphi}{2}\right)$

Chcemy zminimalizować średni koszt

$$C = \int \frac{d\varphi}{2\pi}\int d\tilde\varphi \, \langle\psi| U_\varphi^\dagger \Pi_{\tilde\varphi} U_\varphi |\psi\rangle \, 4\sin^2\left(\frac{\varphi-\tilde\varphi}{2}\right)$$

to samo sztuczka co
wcześniej - indeksujemy
pomiary wartością estymatora

Szukamy $\min\limits_{\Pi_{\tilde\varphi}, |\psi\rangle} C$

Wiemy, że optymalne są pomiary kowariantne $\Pi_{\tilde\varphi} = U_{\tilde\varphi}\Pi_c U_{\tilde\varphi}^\dagger$

$$C = \int\frac{d\varphi}{2\pi}\int\frac{d\tilde\varphi}{2\pi}\langle\psi| \underbrace{U_\varphi^\dagger U_{\tilde\varphi}}_{U^\dagger_{\varphi-\tilde\varphi}} \Pi_c \underbrace{U_{\tilde\varphi}^\dagger U_\varphi}_{U_{\varphi-\tilde\varphi}} |\psi\rangle \, 4\sin^2\frac{\varphi-\tilde\varphi}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\langle\psi| \int d\varphi \, U_\varphi^\dagger \Pi_c U_\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2} |\psi\rangle$$

pamiętamy, że $\int \frac{d\tilde\varphi}{2\pi} U_{\tilde\varphi}\Pi_c U_{\tilde\varphi}^\dagger = \mathbb{1}$ czyli
elementy diagonalne Π_c muszą być 1. Podobnie
jak w przypadku estymacji fazy na $|\psi\rangle^{\otimes N}$ optymalny
będzie $\Pi_c = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & & & \end{bmatrix} = |e\rangle\langle e|$

$$|e\rangle = \sum_{n=0}^{N} |n\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi}\langle\psi| \int d\varphi \, U_\varphi^\dagger |e\rangle\langle e| U_\varphi \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right)|\psi\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi} \langle\psi| \int d\varphi \; U_\varphi^\dagger |e\rangle\langle e| U_\varphi \frac{1}{2}\left(1 - \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}\right) |\psi\rangle$$

$$= \langle\psi| \frac{2}{\pi}\int d\varphi \sum_{n,n'} e^{i\varphi(n-n')} |n\rangle\langle n'| \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-i\varphi}\right) |\psi\rangle$$

$$= \langle\psi| 2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & \ddots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix} |\psi\rangle$$

Szukamy wektora własnego odpowiadającego najmniejszej wartości własnej.. Da się zrobić analitycznie:

Najmniejsza wart własna:

$$\boxed{C = \lambda_{min} = 2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 2\cos\frac{\pi}{N+2}\right) = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{N+2}\right)}$$

wektor własny:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{N} c_n |n\rangle, \quad c_n = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin\frac{(n+1)\pi}{N+2}$$

Rozwijając kosinus dla dużych N

$$C \simeq 2\left(1 - 1 + \frac{\pi^2}{2(N+2)^2}\right) = \frac{\pi^2}{(N+2)^2} \approx \frac{\pi^2}{N^2}$$

Skalowanie Heisenberga ale z czynnikiem π^2

Zaleta: to na pewno da się osiągnąć przynajmniej teoretycznie.