Wykład 3 - nieoznaczonosc

18 października 2014 21:46

3 Zasada (y) nieoznaczoności Heisenberga.

- stand. zasada nieoznaczoności a relacja precyzja vs zaburzenie:

Na kwantach uczymy się innej zasady nieoznaczoności

Mając stan $|\psi\rangle$ definiujemy $\sigma_x = \sqrt{\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle^2}$

$$\sigma_p = \sqrt{\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle}$$

σ_x, σ_p – niepewności pędu, położenia w stanie

(A) $$\sigma_x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Czy to to samo co $\delta x \cdot \delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$?

Ogólniej:

$$\sigma_A \cdot \sigma_B \geq \frac{|\langle[A,B]\rangle|}{2}$$

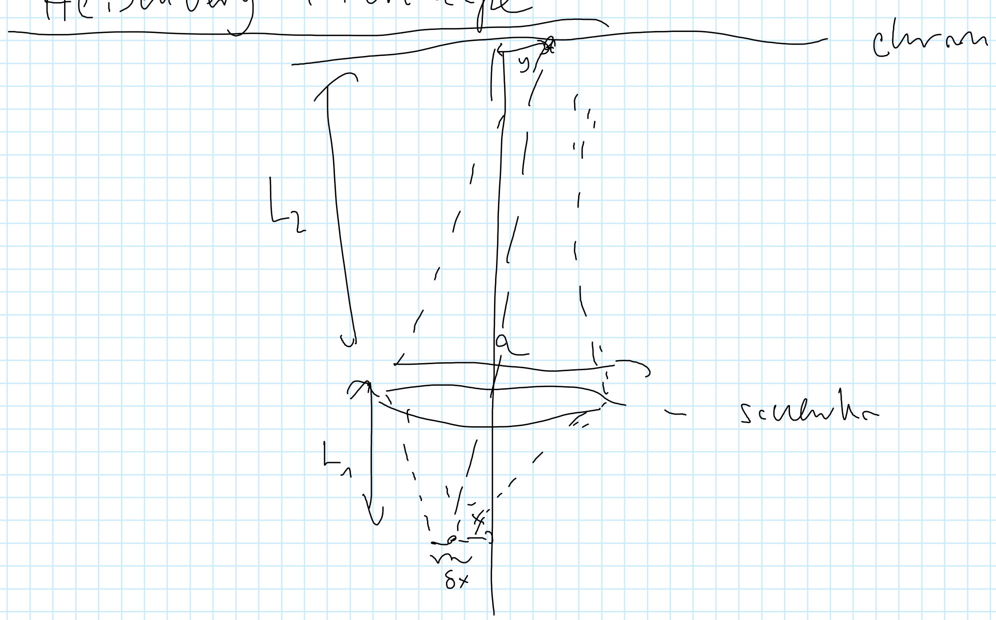
Zasada nieoznaczoności sformułowana przez Robertsona (1929)

nie ma mowy o „zaburzeniu" jednego przez drugi

Raczej myślimy o pomiarach $\hat{x}$ i $\hat{p}$ na osobnych egzemplarzach stanu $|\psi\rangle$.

Heisenberg chciał określić nieuniknione zaburzenie pędu związane z pomiarem położenia

Heisenberg Microscope



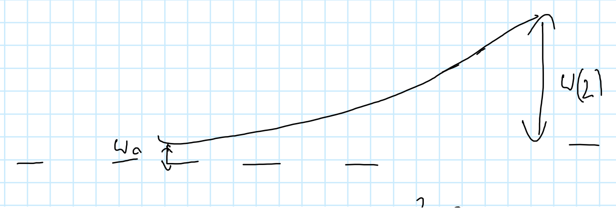
y mamy zmierzyć dowolnie dobrze $\frac{x}{L_1} = \frac{y}{L_2}$ $\quad x = \frac{L_1}{L_2} y$

ale to nie znaczy że x znamy dokładnie, bo mamy wiązki światła a nie promienie: Wiązka światła ogniskowana przez soczewkę o a na odległości L_1 będzie miała szerokość co najmniej $\frac{\lambda}{a}$ czyli $\delta x \approx \frac{\lambda}{a} L_1$. Nie znamy drogi którą leciał foton i jego składowa p_x będzie nie znana $dp_x \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{a}{2L_1}$

Dochodzimy do wniosku:

(B) $\underbrace{\delta x}_{\text{precyzja pomiaru}} \cdot \underbrace{dp_x}_{\text{disturbance}} \gtrsim h \quad \left\{ \hbar, \frac{\hbar}{2} \right.$

Dla wiązki Gaussowskiej:



$E \sim e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$

w_0

$$w^2(z) = w_0^2\left(1+\frac{z^2}{z_R^2}\right) \qquad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Jeśli $z \gg z_R$

$$w^2(z) = \frac{z^2\lambda^2}{\pi^2 w_0^2} \qquad w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0}\cdot z$$

$$w_0 = \frac{2\lambda z}{\pi w(z)} \qquad \Delta p = \frac{h}{\lambda}\frac{\overbrace{w(z)\cdot\frac{1}{2}}^{\text{natężenia}}}{2z} \qquad \Delta x\Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Natężenia $\delta x = \frac{w_0}{2}$

Bardziej precyzyjnie: $\delta_x\, dp_x \geq \frac{\hbar}{2}$

Jak się mają równania (A) i (B) do siebie i czy w ogóle (B) jest poprawne?

Skrót rozumowania Heisenberga:

Wykonujemy pomiar z precyzją δx, po pomiarze nasz stan ma $\sigma_x = \delta x$. Czyli mamy prawo napisać

$$\delta x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

I jeśli utożsamimy σ_p z dp to mamy

$$\delta x\, d_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

trochę mętne i w ogóle nie zdefiniowaliśmy δx, dp ...

Żeby to wybronić trzeba było założyć

- $\delta x \ll \sigma_x^{\text{początkowe}} \Rightarrow \sigma_x = \delta x$
- $\sigma_p^{\text{początkowe}} \ll \sigma_p$ żeby móc powiedzieć że $dp = \sigma_p$

$\sigma_p \ll \sigma_p$ ...

- A jeśli mierzyłby to dniść dla danych stanów to pod warunkiem że δx i δp są niezależne od stanu bo działa dla stan o dobrze określonym pędzie.

- Trzy zasady nieoznaczoności ..

(A) Jeśli chcemy przygotować stan o niskiej nieoznaczoności położenia to będzie mieć wysoką nieoznaczoność pędu

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

(B) Im precyzyjniej mierzymy położenie tym bardziej zaburzamy pęd $\quad \delta x \, \delta p \geq ? \cdot \hbar$

(C) Jeśli chcemy dokonać jednoczesnego pomiaru położenia i pędu: $\quad \delta x \, \delta p \geq ? \cdot \hbar$

Matematycznie:

(A)

$$\rho \, — \boxed{|x\rangle\langle x|} — \quad X(x) = Tr(\rho |x\rangle\langle x|), \quad \sigma_x$$

$$\rho \, — \boxed{|p\rangle\langle p|} — \quad P(p) = Tr(\rho |p\rangle\langle p|), \quad \sigma_p$$

↑ sharp measurement

(B)

$$\rho \, — \boxed{\tilde{\Pi}_x} — \quad \tilde{X}(x) = Tr(\rho \, \tilde{\Pi}_x)$$

$$\rho \, — \boxed{\tilde{\Pi}_{p|x}} \quad \tilde{P}(p|x) = Tr(\tilde{\Pi}_{p|x} \rho_x)$$

$\rho_x - \boxed{\tilde{\Pi}_p} \quad \tilde{p}(p|x)\, \mathrm{Tr}(\tilde{\Pi}_p \rho_x)$

$$J(x,p) = \mathrm{Tr}\Big(\tilde{\Pi}_p \cdot \sum_i K_x^i \rho K_x^{\dagger i}\Big)$$

(C)

$$\rho \longrightarrow \boxed{\tilde{\Pi}_{x,p}} \longrightarrow \quad J(x,p) = \mathrm{Tr}(\rho\, \tilde{\Pi}_{x,p})$$

Widać, że (B) jest szczególnym przypadkiem (C)

Przeanalizujmy (C) i znajdźmy ograniczenia.

Łączny pomiar położenia i pędu

<u>Definicja</u> Pomiary Π_x, Π_p są łącznie mierzalne $\Leftrightarrow$ jeśli istnieje $\Pi_{x,p}$ t. że

$$\Pi_x = \int dp\, \Pi_{x,p}, \quad \Pi_p = \int dx\, \Pi_{x,p}$$

<u>Uwaga</u>:
Jeśli Π_x, Π_p komutują to po prostu bierzemy

$$\Pi_{x,p} = \Pi_x \cdot \Pi_p$$ i ok. Jeśli nie komutują to tak się nie da - nie hermitowski, nie dodatni operator..
np. dla $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$ i $\Pi_p = |p\rangle\langle p|$ nie da się

<u>Definicja</u> Rozmyte operatory położenia i pędu

$$\Pi_x = \int dx'\, \mu(x-x')\, |x'\rangle\langle x'|$$

$$\Pi_p = \int dp'\, \nu(p-p')\, |p'\rangle\langle p'|$$

μ, ν - f. rozmywające np. Gaussy

(2) jeśli odpowiednio rozsmarowaić tr da się zmieścić $\Pi_{x,p}$ t.ż będą to pomiary tego dla $\tilde{\Pi}_x$, $\tilde{\Pi}_p$.

<u>Przykład</u>

$$\Pi_{x,p} = \frac{1}{2\pi\hbar} D(x,p)\, \hat{\Pi}_0\, D^\dagger(x,p)$$

$$D(x,p) = e^{\frac{ix\hat{p} - ip\hat{x}}{\hbar}}$$

op. Weyla (przesunięcia)

Równoważnie możemy pisać

$$\Pi_{x,p} = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{ip\hat{x}}{\hbar}} e^{\frac{ix\hat{p}}{\hbar}} \Pi_0 e^{-\frac{ix\hat{p}}{\hbar}} e^{\frac{ip\hat{x}}{\hbar}}$$

bo $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$

Sumowanie do 1

$$\langle x'| \int dx\, dp \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-ipx'} e^{ix\hat{p}} \Pi_0 e^{-\frac{ix\hat{p}}{\hbar}} e^{\frac{ipx''}{\hbar}} |x''\rangle =$$

$$= \delta(x'-x'') \int dx \langle x|\Pi_0|x\rangle \quad , \quad \mathrm{Tr}\,\Pi_0 = 1$$

$$\Pi_x = \frac{1}{2\pi\hbar}\int dp \quad D(x,p)\,\hat{\Pi}_0\, D^\dagger(x,p)$$

$$\Pi_p = \text{-- '' --} \int dx \quad \text{-- '' --}$$

Obliczmy rozkłady prawdopodobieństwa

$$\tilde{X}(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \mathrm{Tr}\left(\int dp \quad \hat{\varrho}\, D(x,p)\,\hat{\Pi}_0\, D^\dagger(x,p)\right)$$

$$\hat{\Pi}_0 = \int dx' dx'' \, \Pi_0(x',x'')\, |x'\rangle\langle x''|$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \mathrm{Tr}\left(\int dp \quad \hat{\varrho}\, e^{-\frac{ip\hat{x}}{\hbar}} \int dx' dx'' \,\Pi_0(x',x'')\, |x'+x\rangle\langle x''+x|\, e^{\frac{ip\hat{x}}{\hbar}} \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho} \int dp\, dx'\, dx''\, \Pi_0(\cancel{x}', x'')\, e^{ip(x''-x')}\, |x'+x\rangle\langle x''+x| \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\hat{\rho} \int dx'\, X_{\Pi_0}(x')\, |x'+x\rangle\langle x'+x| \right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho\, \underbrace{\int dx'\, X_{\Pi_0}(x'-x)\, |x'\rangle\langle x'|}_{\Pi_x} \right)$$

rozsmarowany operator położenia

$$\tilde{X}(x) = \int dx'\, X_\rho(x')\, X_{\Pi_0}(x'-x)$$

$$\tilde{P}(p) = \int dp'\, P_\rho(p')\, P_{\Pi_0}(p'-p)$$

Jeśli za miarę niedokładności pomiaru przyjmiemy to wariancje rozsmarowującego rozkładu: to

$$\delta x = \sigma_x(\Pi_0) \qquad \text{i wtedy lokalizacja}$$

$$\delta p = \sigma_p(\Pi_0)$$

$$\delta x\, \delta p = \sigma_x(\Pi_0)\, \sigma_p(\Pi_0) \geq \frac{\hbar}{2}$$

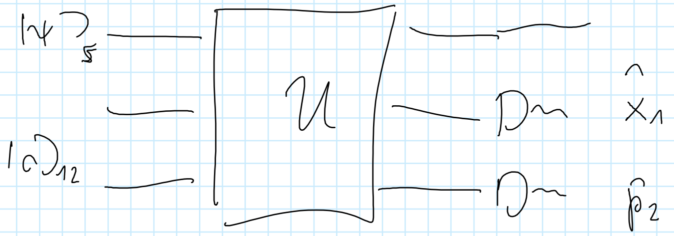
Będzie wysycone jak weźmiemy Gaussa..

To jest dodatkowy szum jaki jest dodawany do wyników pomiarów poza nieoznaczonością istniejącą w samym stanie już wcześniej.

Model pomiaru jednoczesnego $\hat{x}$ i $\hat{p}$

Trzy cząstki $\hat{x}_s, \hat{p}_s, \quad \hat{x}_1, \hat{p}_1, \quad \hat{x}_2, \hat{p}_2$

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{x}_s \hat{p}_1 - \hat{p}_s \hat{x}_2\right)}$$



Przewidujemy obserwable $\hat{x}_1, \hat{p}_2$ w obrazie Heisenberga

4. Kwantowy efekt Zenona

Rozważmy układ w stanie początkowym $|0\rangle$ ewoluujący zgodnie z hamiltonianem H

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iH\cdot t}|0\rangle =$$

$$= a_0(t)|0\rangle + \sum_{i>0} a_i(t)|i\rangle$$

Mierzymy układ w bazie $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \ldots$

Prawdop. że pozostanie w stanie początkowym:

$$p_0 = |\langle 0|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\langle 0| e^{-iHt}|0\rangle\right|^2$$

Dla krótkich t możemy rozwinąć:

$$p_0 = \langle 0| 1 - iHt - \frac{H^2t^2}{2}|0\rangle\langle 0| 1 + iHt - \frac{H^2t^2}{2}|0\rangle$$

$$= 1 - it\langle H\rangle + it\langle H\rangle + \langle H\rangle^2 t^2 - t^2\langle H^2\rangle + O(t^4)$$

$$= 1 - t^2 \Delta^2 H + O(t^4)$$

Pobiłmy pomiar N krotnie w czasie t

Jakie jest prawdop. że pozostanie w stanie $|0\rangle$

$$p_0^{(N)} \approx \left(1 - \left(\frac{t}{N}\right)^2 \Delta^2 H + O\left(\left(\frac{t}{N}\right)^4\right)\right)^N \approx$$

$$\approx 1 - \frac{t^2}{N}\Delta^2 H \xrightarrow{N\to\infty} 1$$

Stan nie ewoluje, częsty pomiar „zamraża" go w stanie początkowym

„Ruch jest złudzeniem" ...