

III Kwantowa teoria estymacji

Definiujemy subklasę estymatorów, żeby rozróżnić od siebie różnych prawdopodobieństw $p_\theta(x)$

Teza estymacji:

$$p_\theta(x) \longrightarrow \mathcal{S}_\theta$$

rodzina stanów kwantowych zależna od parametru (ów) θ .

Żeby estymować, musimy najpierw wybrać pomiar $\mathcal{P}$

$$\mathcal{S}_\theta \xrightarrow{\{\pi_x\}} p_\theta(x) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_x \pi_x = \mathbb{1}, \pi_x \geq 0 \\ \uparrow \\ \text{op. pomiarowe} \end{array} \right.$$

gdzie $p_\theta(x) = \text{Tr}(\mathcal{S}_\theta \pi_x)$

i teraz mamy już kluczowe.

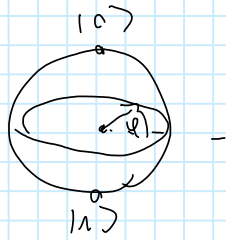
$$\theta \xrightarrow{p_\theta(x)} x \longrightarrow \tilde{\theta}(x)$$

Mamy "dwa razy" trudniej: musimy znaleźć zarówno optymalny pomiar jak i estymator.

Kwantowa teoria estymacji = klasyczna teoria estymacji
+ poszukiwanie optymalnego pomiaru

Przykład

Qubit na równoległym płaszczyźnie Blocha $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle)$



Otrzymujemy N kopii: $S_\varphi^{(N)} = (|\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|)^{\otimes N}$

Jeśli wybierz pomiar i optymalizujemy, żeby optymalnie pomierzyć φ , a Relacja na razie $N=1$:

a) pomiar $\Pi_0 = |0\rangle\langle 0|$, $\Pi_1 = |1\rangle\langle 1|$

$$p_\varphi(0) = \frac{1}{2} \quad p_\varphi(1) = \frac{1}{2} \quad \sim \text{brak informacji na } \varphi \text{ poprzez pomiar}$$

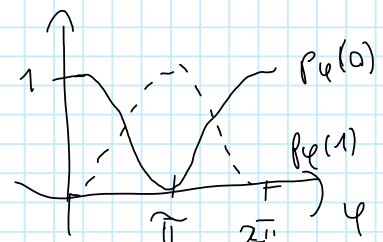
b) pomiar $\Pi_0 = |+\rangle\langle +|$, $\Pi_1 = |-\rangle\langle -|$, $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$

$$p_\varphi(0) = |\langle + | \psi_\varphi \rangle|^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos\varphi)$$

$$p_\varphi(1) = \frac{1}{2}(1 - \cos\varphi)$$

$$p_\varphi(x) = \frac{1}{2}(1 + (-1)^x \cos\varphi) \quad x=0,1$$

Niby dobrze, ale mamy niepełnomocność $\varphi \leftrightarrow 2\pi - \varphi$



Uznamy, że nie jesteśmy siłą ograniczeni do $\varphi \in [0, \pi]$

Ce mówią nam o C-R że tutaj nie odpiera

Estymator:

$$\hat{\Delta}_\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{F}}$$

$$F = \frac{2}{1+\cos\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{4} + \frac{2}{1-\cos\varphi} \frac{\sin^2\varphi}{4} = \frac{\sin^2\varphi}{2} \left(\frac{2}{1-\cos\varphi} \right) = 1$$

Wtedy, ile w granicy $N \rightarrow \infty$ mamy mieć
 precyzję $\Delta \tilde{\varphi} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ jeśli wybieramy ML

Ale dla skończonych N mi nie ma gwarancji uzyskania;

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\varphi} \log \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi (-1)^x) &= \frac{1}{1 - \cos \varphi (-1)^x} (-1)^x \sin \varphi = \\ &\neq \lambda(\varphi) (\tilde{\varphi}(x) - \varphi) \end{aligned} \right.$$

Pytania:

— czy można uzyskać lepsze asymptotyczne osiągnięcie
 niż $\frac{1}{\sqrt{N}}$ jeśli wybrać nieograniczone pomiar
 — kłopotliwe $\sum_i \Pi_i^{(N)} = \mathbb{I}_{2^N}$

— jaki optymalny pomiar dla skończonych N ?

1. Kwantowe ograniczenie Cramera-Rao

Mając S_θ , chcemy uzyskać ograniczenie na
 precyzję $\Delta \tilde{\theta}$, działając na danych pomiarów
 i estymatorów nieobciążonych (niechwilnie),

Jeśli wybieramy pomiar Π_x , $\int dx \Pi_x = \mathbb{I}$ to

$$(*) \quad p_\theta(x) = \text{Tr}(\Pi_x S_\theta)$$

Wtedy, ile klasyczna informacja Fishera:

Wtedy, w klasycznej limitowej Fishera:

$$F = \int dx \frac{1}{f(\theta)} \left(\frac{dp_\theta(x)}{d\theta} \right)^2 \quad ; \quad \Delta \tilde{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F}}$$

Wstawmy (*) :

$$F = \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\Pi_x S_\theta)} \left(\frac{d \text{Tr}(\Pi_x S_\theta)}{d\theta} \right)^2 =$$

$$= \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\Pi_x S_\theta)} \left[\text{Tr} \left(\Pi_x \frac{dS_\theta}{d\theta} \right) \right]^2$$

Wprowadzamy oznaczenie:

$$\frac{dS_\theta}{d\theta} = \frac{1}{2} \left[\Lambda^{(\theta)} S_\theta + S_\theta \Lambda^{(\theta)} \right]$$

Λ_θ pewien operator w zależności od θ
(SLD - symmetric logarithmic derivative)

Mozemy zapisać jawnie:

Nadm $|i\rangle^{(\theta)}$ - baza własna $S_\theta = \sum_i p_i^{(\theta)} |i\rangle^{(\theta)} \langle i|$

W tej bazie:

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)_{ij} = \frac{1}{2} \left[\Lambda_{ij} p_j + p_i \Lambda_{ij} \right]$$

$$\Lambda_{ij} = \frac{2}{p_i + p_j} \left(\frac{dS_\theta}{d\theta} \right)_{ij}, \quad \Lambda - \text{op. hermitowski}$$

$$F = \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\Pi_x S_\theta)} \left[\text{Tr} \left[\frac{1}{2} \Pi_x (\Lambda S_\theta + S_\theta \Lambda) \right] \right]^2 =$$

$$\left\{ \text{Tr} (A(BC+CB)) = \text{Tr} (ABC + (ABC)^{\dagger}) \right.$$

$$= \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)} \left(\text{Re Tr} [\Pi_x \Lambda \rho_\theta] \right)^2 \leq \\ \leq \int dx \frac{|\text{Tr}(\Pi_x \Lambda \rho_\theta)|^2}{\text{Tr}(\Pi_x \rho_\theta)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |\text{Tr}(AB^{\dagger})|^2 \leq \text{Tr}(A^{\dagger}A) \text{Tr}(B^{\dagger}B) \\ A = \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_\theta} \quad B = \sqrt{\Pi_x} \Lambda \sqrt{\rho_\theta} \end{array} \right.$$

$$\leq \int dx \frac{\text{Tr}(\rho_\theta \Pi_x) \cdot \text{Tr}(\sqrt{\rho_\theta} \Lambda \Pi_x \Lambda \sqrt{\rho_\theta})}{\text{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)} = \\ = \text{Tr}(\rho_\theta \Lambda \int dx \Pi_x \Lambda) = \text{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2) =: F_Q$$

F_Q - low, inf. Fisher relative to the
of ρ_θ a n. of parameters

Writing using the probability

$$F_Q = \text{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2) = \langle \Lambda^2 \rangle$$

gives Λ - symmetric log. derivative

$$F = \left\langle \left(\frac{d}{d\theta} \log p_\theta(h) \right)^2 \right\rangle$$

log derivative

$$\Delta \tilde{\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{F_Q}} \quad F_Q = \text{Tr}(\rho_\theta \Lambda^2)$$

Kwantowa nierówność C-R.

1.1 Adytywność F_Q

$$\rho_\theta^{(12)} = \rho_\theta^{(1)} \otimes \rho_\theta^{(2)}$$

$$\frac{d\rho_\theta^{(12)}}{d\theta} = \frac{d\rho_\theta^{(1)}}{d\theta} \otimes \rho_\theta^{(2)} + \rho_\theta^{(1)} \otimes \frac{d\rho_\theta^{(2)}}{d\theta} =$$

$$= \frac{1}{2} (\Lambda_1 \rho_\theta^{(1)} + \rho_\theta^{(1)} \Lambda_1) \otimes \rho_\theta^{(2)} + \rho_\theta^{(1)} \otimes \frac{1}{2} [\Lambda_2 \rho_\theta^{(2)} + \rho_\theta^{(2)} \Lambda_2]$$

czyli $\Lambda_{12} = \Lambda_1 \otimes I + I \otimes \Lambda_2$

$$F_Q^{(12)} = \text{Tr}(\rho_\theta^{(1)} \otimes \rho_\theta^{(2)} \Lambda_{12}^2) = F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)} + 2\text{Tr}(\rho_\theta^{(1)} \otimes \rho_\theta^{(2)} \cdot \Lambda_1 \otimes \Lambda_2)$$

$$= F_Q^{(1)} + F_Q^{(2)}$$

bo $\text{Tr}(\rho \cdot \Lambda) = 0$

$$\left\{ \frac{d\rho}{d\theta} = \frac{1}{2} (\rho + \rho \Lambda) \right.$$

$$\left. \frac{d\text{Tr}\rho}{d\theta} = \text{Tr}(\rho \Lambda) = 0 \right.$$

Jśli $\rho_\theta^{(N)} = \rho_\theta^{\otimes N}$ $F_Q^{(N)} = N \cdot F_Q$

Zwrócić uwagę, że $F_Q^{(N)}$ mogą być dowolnie
pomiary kubitowe.

1.2 Stan krytyczny

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \psi_e | \psi_e \rangle = 1 \\ \langle \psi_e | \psi_e \rangle^2 + \langle \psi_e' | \psi_e \rangle + |\langle \psi_e' | \psi_e \rangle|^2 = 1 - |\langle \psi_e' | \psi_e \rangle|^2 \end{array} \right.$$

$$F_Q = 4 \left(\langle \psi_e' | \psi_e' \rangle - |\langle \psi_e' | \psi_e \rangle|^2 \right)$$

Intuija:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\psi_{\theta+\theta_0}|^2 d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} |\psi_{\theta}|^2 d\theta$$

Imagine $|\psi_e'\rangle$ tym lepiej, ale nie w kierunku $|\psi_e\rangle$

Przykład

$$|\psi_t\rangle = e^{-\frac{iH \cdot t}{\hbar}} |\psi\rangle \quad \text{czyli estymacja czasu ewolucji}$$

$$F_Q = \frac{4}{\hbar^2} \left(\langle \psi | H^2 | \psi \rangle - |\langle \psi | H | \psi \rangle|^2 \right) =$$

$$= 4 \Delta^2 H$$

$$\Delta \tilde{t} \geq \frac{\hbar}{\sqrt{4 \Delta^2 H}}$$

$$\Delta^2 \tilde{t} \cdot \Delta^2 H \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

11 Zasad mechaniki klasycznej - energia

H - operator,

F - estymator

{ polyme slaności posiadać może m. operator
{ (rozum)

Przykład

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle)$$

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\varphi} |1\rangle)$$

$$F_Q = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = 1$$

Czyli jest możliwość $|\psi\rangle^{\otimes N}$ to

$$F_Q^{(N)} = N \Rightarrow \Delta\tilde{\varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$$

to pokaże, że asymptotycznie granic
lokalny w baze $|0\rangle, |1\rangle$ był
optymalny,

1.3 Wyścigi i Kwantowe C-R (QCR)

Czy zawsze jest granic $\overline{1/x}$, który
~ kwantowej wersji wyprowadzenia do wielkości

niezmien. $\forall$:

$$(*) \left| \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_a) \right| = \left| \operatorname{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_a) \right|$$

$$(**) \left| \operatorname{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_a) \right|^2 = \operatorname{Tr}(\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_a}^\dagger \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_a}) = \operatorname{Tr}(\sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_a}^\dagger \sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_a})$$

Wzrost (*): $\sqrt{\Pi_x} \sqrt{\rho_a} = \lambda \sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_a}$

jeu dodatnio $\lambda \in \mathbb{R}$ to

$$\begin{aligned} \left| \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_a) \right| &= \left| \operatorname{Re} \operatorname{Tr}(\rho_a \sqrt{\Pi_x} \sqrt{\Pi_x} \wedge \sqrt{\rho_a}) \right| = \\ &= \left| \lambda \operatorname{Tr}(\sqrt{\rho_a} \wedge \Pi_x \wedge \sqrt{\rho_a}) \right| = \left| \operatorname{Tr}(\Pi_x \wedge \rho_a) \right| \end{aligned}$$

Jesli wezmemy $\Pi_x = |x\rangle\langle x|$ gdzie $|x\rangle$ brzo wektor $\wedge$

$$\text{to } |x\rangle\langle x| \sqrt{\rho_a} = \lambda \wedge |x\rangle\langle x| \sqrt{\rho_a} = \underbrace{\lambda}_{\lambda_x} |x\rangle\langle x| \sqrt{\rho_a}$$

Czyli OK.

Poniewaz wyszyfow $Q \in \mathbb{R}$ jest pomiar w baze wlasnej $S \in D_x$ ale uwagi to moze zaleziec od θ wtedy nie jest czyste pole to zostawic.

Przyklad

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle)$$

$$|\psi'\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} |1\rangle$$

$$1 = 2 (|\psi\rangle\langle\psi| + |\psi'\rangle\langle\psi'|) =$$

$$= 2 \left(\frac{i}{2} e^{i\varphi} |1\rangle (\langle 0| + e^{-i\varphi} \langle 1|) - \frac{i}{2} (|0\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle) e^{-i\varphi} \langle 1| \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -i e^{i\varphi} \\ i e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

czyli bez wicmn?

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + i e^{i\varphi} |1\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle - i e^{i\varphi} |1\rangle)$$

Nam się udało z inną $|x\rangle, |y\rangle$, ale widać że z tego też by było dobre

(choć się to wydaje jak albo dowód, albo
 (Wskazanie antyegzemplu na nieumiejętność sfery Bloch-ów)
 więc tutaj pomiar nie musi zależeć od φ)

1.4 Wieloparametrowe QCR

$$S_{\vec{\theta}} \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$$

Klasyczny multi-ry:

$$C \geq F^{-1}$$

multi-hermityczny

$$F_{ij} = \int dx \frac{1}{p_{\theta}(x)} \frac{\partial p_{\theta}(x)}{\partial \theta_i} \frac{\partial p_{\theta}(x)}{\partial \theta_j}$$

multi-Fishera

Pomiarowy dowód kwantowy z tym i
 mamy k różnych SLD:

$$\frac{d S_{\vec{\theta}}}{d \theta_i} = \frac{1}{2} (\Lambda_i S_{\vec{\theta}} + S_{\vec{\theta}} \Lambda_i)$$

Kwantowa multi-Fishera:

$$(F_Q)_{ij} = \text{Tr} \left[\rho_{\theta}^{-\frac{1}{2}} (\Lambda_i \Lambda_j + \Lambda_j \Lambda_i) \right]$$

$$\boxed{C \geq F_Q^{-1}}$$

Wiemowa wieloparametrowa macierz $C \sim R$

$$F_{ij} = \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{\theta} \Pi_x)} \left(\text{Tr} \Pi_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \right) \cdot \text{Tr} \left(\Pi_x \frac{\partial \rho}{\partial \theta_j} \right)$$

$$= \int dx \frac{1}{\text{Tr}(\rho_{\theta} \Pi_x)} \left(\text{Re Tr}(\Pi_x \Lambda_i \rho) \right) \cdot \left(\text{Re Tr}(\Pi_x \Lambda_j \rho) \right)$$

$$\langle \alpha | F | \alpha \rangle = \int dx \frac{1}{\text{Tr} \rho_{\theta} \Pi_x} \left(\sum_i \alpha_i \text{Re Tr}(\Pi_x \Lambda_i \rho) \right)^2$$

$$= \int dx \frac{1}{\text{Tr} \rho_{\theta} \Pi_x} \left(\text{Re Tr} \left(\sum_i \alpha_i \Pi_x \Lambda_i \rho \right) \right)^2 \leq$$

$$\leq \int dx \frac{\left| \text{Tr} \left(\sum_i \alpha_i \Pi_x \Lambda_i \rho \right) \right|^2}{\text{Tr} \rho \Pi}$$

$$A = \sqrt{\rho} \sqrt{\Pi} \quad B = \sum_i \alpha_i \sqrt{\Pi} \Lambda_i \sqrt{\rho}$$

$$\leq \int dx \text{Tr} \left(\sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \sqrt{\rho} \Lambda_i \sqrt{\Pi} \sqrt{\Pi} \Lambda_j \sqrt{\rho} \right) =$$

$$= \sum_{ij} \alpha_i \alpha_j \text{Tr}(\rho \Lambda_i \Lambda_j) = \langle \alpha | \text{Tr} \left(\rho^{\frac{1}{2}} (\Lambda_i \Lambda_j + \Lambda_j \Lambda_i) \right) | \alpha \rangle$$

$$F \leq F_Q$$

W ogólnosci jeli Λ_i i Λ_j nie hamują
mię nie potrzebujemy promienia i lotamy między wyspami
QR.

Metryka Bures'a

Kwantowa inf. Fishera jako miara różnic między
stanami, może posłużyć do stworzenia „naturalnej”
metryki na macierzach gęstości.

• Odległość infinitesimalna:

$$d_B(\rho, \rho + d\rho)^2 = \frac{1}{4} \text{Tr}(\rho \Lambda^2),$$

gdzie
$$d\rho = \frac{1}{2}(\Lambda \rho + \rho \Lambda)$$

W ogólnosci trudno policzyć pewną postać.

FidA:

$$F(\rho_1, \rho_2) = \left[\text{Tr}(\sqrt{\sqrt{\rho_1} \rho_2 \sqrt{\rho_1}}) \right]^2 - \text{Fidelity}$$

$$F(\rho_{\text{in}}, \rho_{\text{out}}) = 1 - \frac{1}{2} F(\rho_{\text{in}}) \ln^2 A$$

$$F(\rho_\psi, \rho_{\psi+d\psi}) = 1 - \frac{1}{4} F(\rho_\psi) d\psi^2 \quad \square$$

Proof:

We can relate F to fidelity $\mathcal{F}$

$$\sqrt{\mathcal{F}(\rho_\psi, \rho_{\psi+d\psi})} = \text{Tr} \left(\left[\rho_\psi^{\frac{1}{2}} \rho_{\psi+d\psi} \rho_\psi^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\left\{ \rho_{\psi+d\psi} = \rho_\psi + \dot{\rho}_\psi d\psi \right.$$

$$= \text{Tr} \left(\left[\rho_\psi^{\frac{1}{2}} (\rho_\psi + \dot{\rho}_\psi d\psi) \rho_\psi^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$= \text{Tr} \left(\left[\rho_\psi^2 + \rho_\psi^{\frac{1}{2}} \dot{\rho}_\psi \rho_\psi^{\frac{1}{2}} d\psi \right]^{\frac{1}{2}} \right) =$$

$$\left\{ \dot{\rho}_\psi = \frac{1}{2} (\rho_\psi \Lambda + \Lambda \rho_\psi) \quad \text{SLD} \right.$$

$$\left\{ (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 \right.$$

Expand to the 2-nd order:

$$\left[\rho_\psi^2 + \rho_\psi^{\frac{1}{2}} \dot{\rho}_\psi \rho_\psi^{\frac{1}{2}} d\psi \right]^{\frac{1}{2}} = \rho_\psi + A d\psi + B d\psi^2$$

$$\left\{ \rho_\psi A + A \rho_\psi = \rho_\psi^{\frac{1}{2}} \dot{\rho}_\psi \rho_\psi^{\frac{1}{2}} \right.$$

$$\left\{ A^2 + \rho_\psi B + B \rho_\psi = 0 \right.$$

$$p_i A_{ij} + A_{ij} p_j = \sqrt{p_i} \dot{\rho}_{ij} \sqrt{p_j}$$

$$A_{ij} = \frac{\sqrt{p_i p_j}}{p_i + p_j} \dot{\rho}_{ij} \Rightarrow \text{Tr} A = 0$$

$$(A^2)_{ij} + B_{ij} (p_i + p_j) = 0$$

$$(A^2)_{ij} = \sum_k A_{ik} A_{kj} = -B_{ij} (p_i + p_j)$$

$$B_{ij} = - \frac{\sum_k A_{ik} A_{kj}}{p_i + p_j} = - \frac{1}{p_i + p_j} \cdot \sum_k \frac{\sqrt{p_i p_k}}{p_i + p_k} \dot{S}_{ik} \frac{\sqrt{p_k p_j}}{p_k + p_j} \dot{S}_{kj}$$

$$\text{Tr } B = - \sum_{ik} \frac{1}{2 p_i} \frac{p_i p_k}{(p_i + p_k)^2} |\dot{S}_{ik}|^2$$

$$\sqrt{F} = 1 - \frac{1}{2} \sum_{ik} \frac{p_k}{(p_i + p_k)^2} (\dot{S}_{ik})^2$$

$$\dot{S} = \frac{1}{2} (\Lambda S + S \Lambda) \quad \dot{S}_{ik} = \frac{1}{2} (\Lambda_{ik} p_k + p_i \Lambda_{ik}) = \frac{1}{2} \Lambda_{ik} (p_i + p_k)$$

$$\sqrt{F} = 1 - \frac{1}{8} \sum_{ik} p_k |\Lambda_{ik}|^2 = 1 - \frac{1}{8} \underbrace{\text{Tr} (S \Lambda^2)}_F$$

$$F \approx 1 - \frac{1}{4} F$$



Fakt:

Fakt:

Bures angle

$$D_A = \int_{S_1}^{S_2} d_B S = \arccos \sqrt{F(S_1, S_2)}$$

S_1, S_2 are density matrices

FaW:

$$F(S_\psi^{(S)}) = \min_{|\psi_\psi^{(SE)}\rangle} F(|\psi_\psi^{(SE)}\rangle)$$
$$S_\psi = \text{Tr}_E |\psi_\psi\rangle \langle \psi_\psi|$$

Konsideration for the Uhlmann Fidelity is

$$F(S_1, S_2) = \max_{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle} |\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle|^2$$
$$S_i = \text{Tr}_E (|\psi_i\rangle \langle \psi_i|)$$

$$F(S, \sigma) = \max_{|\psi\rangle, |\varphi\rangle} |\langle \psi | \varphi \rangle|^2$$

where $S = \text{Tr}_E |\psi\rangle \langle \psi|$, $\sigma = \text{Tr}_E |\varphi\rangle \langle \varphi|$

Proof

$$|\psi\rangle_{SE}^{i\alpha} \rightarrow (A_\psi)^i_\alpha$$

Purification as a matrix

$$\rho = \text{Tr}_E |\psi\rangle\langle\psi|$$

$$\rho_{ij}^i = \sum_\alpha \psi^{i\alpha} \psi_{j\alpha}^* = \sum_\alpha A^i_\alpha A^{*j}_\alpha = (A A^\dagger)^i_j$$

$$\rho = A A^\dagger$$

We can reformulate the theorem:

$$\mathcal{F}(\rho, \sigma) = \max_{A, B} |\text{Tr}(A B^\dagger)|^2$$

$$\rho = A A^\dagger \\ \sigma = B B^\dagger$$

//

$$\text{Tr}(|\rho^{\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}}|)^2$$

Different purifications correspond to $A' = A \cdot U$

Let us take polar decomposition of A

$$A = \rho^{\frac{1}{2}} U \quad B = \sigma^{\frac{1}{2}} V$$

$$|\text{Tr}(A B^\dagger)| = |\text{Tr}(\rho^{\frac{1}{2}} U V \sigma^{\frac{1}{2}})| =$$

$$= |\text{Tr}(\sigma^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} U V)| \leq \text{Tr}(|\sigma^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}}|) = \sqrt{\mathcal{F}}$$

Saturated when $UV = \mathbb{1}$.



Holevo C-R bound

Multiparameter C-R bound not always saturable, due to non-commutativity of respective SLDs.

There exist a stronger bound due to Helvo
 Standard L-R bound can be written as,

$$\text{Tr}(G \text{Cov}(\tilde{y})) \geq \text{Tr}(G F_Q^{-1})$$

where G - cost matrix -

First we will show alternative form of QFI:

Lemma

$$\text{Tr}(G F_Q^{-1}) = \min_{\{X_i\}} \text{Tr}(G R V)$$

where $V_{ij} = \text{Tr}(X_i X_j S_\psi)$

with constraints on X_i : (hermitian)

$$\forall_{ij} \quad \frac{1}{2} \text{Tr}(\{X_i, X_j\} S_\psi) = \delta_{ij}$$

Proof

$$\min_{\{X_i\}} \sum_{ij} \frac{1}{2} G_{ij} \text{Tr}(S_\psi \{X_i, X_j\}) - \lambda_{ij} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{2} \text{Tr}(\{X_i, X_j\} S_\psi) \right)$$

$$\forall_i \quad \sum_j G_{ij} \{S_\psi, X_j\} - \lambda_{ij} \{S_\psi, L_j\} = 0$$

$$X_i = \sum_j (G^{-1} \lambda)_{ij} L_j \quad - \text{better approximation}$$

2 więcej mamy z kłci, że:

$$\frac{1}{2} (G^{-1} \Lambda)_{ik} \operatorname{Tr}(\{L_k, L_j\} S_\varphi) = \delta_{ij}$$

$$G^{-1} \Lambda F_Q = \mathbb{1}$$

$\Downarrow$

$$X_i = \sum_j (F_Q^{-1})_{ij} L_j$$

$$\operatorname{Tr}(G R_{\text{eff}}) = \operatorname{Tr}(G F_Q^{-1} F_Q F_Q^{-1}) = \operatorname{Tr}(G F_Q^{-1})$$

$\square$

Ograniczenie Hileb: z kłci ma postać:

$$\operatorname{Tr}(G \operatorname{Cov}(\tilde{\varphi})) \geq \min_{\{X_i\}} \operatorname{Tr}(G R_{\text{eff}}) + \|G \ln V\|_1$$

wzr. jest mniejsze kiedy $\|G \ln V\|_1 > 0$.

Dowód:

...