Wyklad 8 - quantum bayesian estimation

9 grudnia 2012 21:10

2. Kwantowa estymacja Bayesowska

ρ_θ, ale przyjmujemy rozkład a priori $p(\theta)$

Szukamy pomiarów $\{\Pi_x\}$ i estymatora $\tilde{\theta}(x)$, minimalizującego średni koszt:

$$\bar{C} = \int d\theta\, p(\theta) \int dx\, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_x)\, C(\theta, \tilde{\theta}(x))$$

np. $C(\theta, \tilde{\theta}(x)) = (\theta - \tilde{\theta}(x))^2$ wtedy $\bar{C} = \delta^2 \tilde{\theta}$

W klasycznej estymacji kiedy $p(x|\theta)$ było ustalone opt. estymator zawsze było prosto zapisać

$$\bar{C} = \int dx \left(\int d\theta\, p(\theta|x)\, C(\theta|\tilde{y}) \right) p(x)$$

trzeba zrobić $\frac{d}{d\tilde{\theta}} \int d\theta\, p(\theta|x)\, C(\theta, \tilde{\theta}) = 0 \Rightarrow \tilde{\theta}(x) = ..$

np dla $C(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta - \tilde{\theta})^2 \Rightarrow \tilde{\theta}(x) = \int \theta\, p(\theta|x)$

Jak szukać opt. pomiarów?

Nie mamy pewności, że możemy ograniczyć się do pomiarów rzutowych. Czyli $\{\Pi_x\}$ ogólny POVM. W ogólności nieskończenie wiele operatorów....

<u>Ogólny estymator + pomiar = ogólny pomiar</u>

Skoro $\tilde{\theta}(x)$ - estymator to możemy ponumerować nowe op. pomiarowe przez estymowane wartości parametru:

$$\{\Pi_x\} \longrightarrow \{\Pi_{\theta'}\} \qquad \Pi_{\theta'} = \int dx\, \Pi_x\, \delta(\theta' - \tilde{\theta}(x))$$

i otrzymuje:

$$\bar{C} = \int d\theta\, p(\theta) \int d\theta'\, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_{\theta'})\, C(\theta, \theta')$$

$$\overline{C} = \int d\theta \, p(\theta) \int d\theta' \, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_{\theta'}) \, C(\theta, \theta')$$

Dalej zamiast θ' będziemy pisać $\tilde{\theta}$ żeby przypominać że ten indeks pełni rolę estymatora

$$\boxed{\begin{array}{c} \overline{C} = \int d\theta \, d\tilde{\theta} \, p(\theta) \, \mathrm{Tr}(\rho_\theta \Pi_{\tilde{\theta}}) \, C(\theta, \tilde{\theta}) \\ \min_{\{\Pi_{\tilde{\theta}}\}} \overline{C}, \quad \Pi_{\tilde{\theta}} \geq 0 \quad \int d\tilde{\theta} \, \Pi_{\tilde{\theta}} = \mathbb{1} \\ \text{Bayesowski problem estymacji kwantowej} \end{array}}$$

W ogólności problem b. trudny do rozwiązania

ale jeśli mamy pewne symetrie....

2.1. Koszt kwadratowy

Weźmy $C(\theta, \tilde{\theta}) = (\theta - \tilde{\theta})^2$ i spróbujmy znaleźć

$\min \overline{C}$ i optymalny pomiar.

$$\overline{\Delta^2 \tilde{\theta}} = \int d\theta \, d\tilde{\theta} \, p(\theta) \, \mathrm{Tr}\left[\rho_\theta \Pi_{\tilde{\theta}} \, (\theta^2 + \tilde{\theta}^2 - 2\theta\tilde{\theta})\right] =$$

$$= \underbrace{\int d\theta \, p(\theta) \, \theta^2}_{\Delta^2\theta} + \mathrm{Tr} \underbrace{\int d\theta \, p(\theta) \, \rho_\theta}_{\overline{\rho}} \underbrace{\int d\tilde{\theta} \, \Pi_{\tilde{\theta}} \, \tilde{\theta}^2}_{\Lambda_2}$$

$$- 2 \, \mathrm{Tr} \underbrace{\int d\theta \, p(\theta) \, \rho_\theta \theta}_{\overline{\rho}'} \underbrace{\int d\tilde{\theta} \, \Pi_{\tilde{\theta}} \, \tilde{\theta}}_{\Lambda_1} =$$

$$= \Delta^2\theta + \mathrm{Tr}(\overline{\rho} \Lambda_2) - 2 \, \mathrm{Tr}(\overline{\rho}' \Lambda_1)$$

Szukamy min po $\{\Pi_{\tilde{\theta}}\}$.

Przyjmijmy na razie bez dowodu, że optymalny pomiar możemy ograniczyć do rzutowych. (Dowód później)

$\Pi_{\tilde{\theta}_i} = |\tilde{\theta}_i\rangle\langle\tilde{\theta}_i|$ gdzie $|\tilde{\theta}_i\rangle$ ortogonalne wektory własne

$\sum_i \Pi_{\tilde{\theta}_i} = \mathbb{1}$, $\tilde{\theta}_i$ - estymowane wartości

wtedy $\bar{\Lambda}_2 = \sum_i |\tilde{\theta}_i\rangle\langle\tilde{\theta}_i| \tilde{\theta}_i^2 = \bar{\Lambda}_1^2$

Oznaczymy $\bar{\Lambda} := \bar{\Lambda}_1$ $\quad \bar{\Lambda}_2 = \bar{\Lambda}^2$

$$\Delta^2\tilde{\theta} = \Delta^2\theta + \mathrm{Tr}(\bar{\varrho}\bar{\Lambda}^2) - 2\,\mathrm{Tr}(\bar{\varrho}'\bar{\Lambda})$$

I szukamy min po $\bar{\Lambda}$ - dowolna macierz hermitowska.

Funkcja do minimalizowania:

$$\Delta^2\tilde{\theta} = \Delta^2\theta + \sum_{kij} \bar{\varrho}_{ki}\bar{\Lambda}_{ij}\bar{\Lambda}_{jk} - 2\sum_{ij}\bar{\varrho}'_{ji}\bar{\Lambda}_{ij}$$

$\Lambda_{ij} = \Lambda_{ij}^R + i\Lambda_{ij}^I$, $\quad i<j$

$$\frac{\partial \Delta^2\tilde{\theta}}{\partial \Lambda_{ij}^R} = \sum_k \bar{\varrho}_{ki}\bar{\Lambda}_{jk} + \sum_k \varrho_{jk}\bar{\Lambda}_{ki} - 2\bar{\varrho}'_{ji} = 0$$

$$\frac{\partial \Delta^2\tilde{\theta}}{\partial \Lambda_{ij}^I} = i\,(- '' -) = 0$$

$$\bar{\Lambda}\bar{\varrho} + \bar{\varrho}\bar{\Lambda} - 2\bar{\varrho}' = 0$$

$$\frac{1}{2}(\bar{\Lambda}\bar{\varrho} + \bar{\varrho}\bar{\Lambda}) = \bar{\varrho}' \quad \text{Warunek na } \bar{\Lambda}$$

Przy takim $\bar{\Lambda}$ optymalny koszt:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta^2\tilde{\theta} &= \Delta^2\theta - \mathrm{Tr}(\bar{\varrho}\bar{\Lambda}^2) \\ \frac{1}{2}(\bar{\Lambda}\bar{\varrho} + \bar{\varrho}\bar{\Lambda}) &= \bar{\varrho}' \end{aligned}}$$

Czy to coś przypomina?

Gdyby $\bar{\varrho}' \stackrel{?}{=} \frac{d\bar{\varrho}}{d\theta}$ ... ...

Gaussowski rozkład a priori :

$$p_{\theta_0}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(\theta-\theta_0)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\bar{\rho}' = \int d\theta \, p_{\theta_0}(\theta)\Big|_{\theta_0=0} \theta \rho_\theta = \int d\theta \, \frac{d}{d\theta_0} p(\theta)\Big|_{\theta_0=0} \rho_\theta \cdot \sigma^2$$

$$= \sigma^2 \frac{d}{d\theta_0}\left(\int d\theta \, p_{\theta_0}(\theta) \rho_\theta\right)\Big|_{\theta_0=0} = \sigma^2 \frac{d\bar{\rho}_{\theta_0}}{d\theta_0}$$

$$\sigma^2 = \Delta^2\theta$$

przesunięcie średniego stanu z przesunięciem średniej a priori ;

A w tej sytuacji

$$\frac{1}{2}\left(\Lambda\bar{\rho} + \bar{\rho}\Lambda\right) = \Delta^2\theta \, \frac{d\bar{\rho}_{\theta_0}}{d\theta_0}$$

Czyli $\bar{\Lambda} = \Lambda \cdot \Delta^2\theta$

L_{SLD} dla problemu gdzie

Mamy $\bar{\rho}_{\theta_0}$ i przesuwamy θ_0

Czyli $Tr(\bar{\rho}\bar{\Lambda}^2) = (\Delta^2\theta)^2 F_{\theta_0}(\bar{\rho}_{\theta_0})$

$$\boxed{\overline{\Delta^2\tilde{\theta}} = \Delta^2\theta\left[1 - \Delta^2\theta \, F_{\theta_0}(\bar{\rho}_{\theta_0})\right]}$$

Piękny związek Kwantowego Bayesa i Kwantowego Fishera..

Niestety rozkład Gaussa nie jest naturalny dla fazy... jak również kwadratowa f-kcja kosztu

ale dla estymacji wartości ...

⌂ - jeden qubit est. wartości.

(Dowód, że pomiar rzutowy optymalny

Dowód, że pomiar nutowy optymalny

Rozważmy ogólny $\Pi_{\tilde{\theta}}$, i $L_1 = \int d\tilde{\theta}\, \Pi_{\tilde{\theta}}\, \tilde{\theta}$.

Niech $\tilde{\theta}_i$, $|\tilde{\theta}_i\rangle$ będą wart. i wekt. własnymi L_1,

$$L_1 = \sum_i \tilde{\theta}_i |\tilde{\theta}_i\rangle\langle\tilde{\theta}_i| = L_1^{mi}$$

Pokażemy że zastępując strategię $\{\Pi_{\tilde{\theta}}, \tilde{\theta}\}$ strategią

$\{|\tilde{\theta}_i\rangle\langle\tilde{\theta}_i|, \tilde{\theta}_i\}$ nic nie tracimy.

$$L_2^{mi} = \sum_i \tilde{\theta}_i^2 |\tilde{\theta}_i\rangle\langle\tilde{\theta}_i| = L_1^2$$

Musimy pokazać że:

$$\forall_\rho \ \mathrm{Tr}(\rho L_1^2) \leq \mathrm{Tr}(\rho L_2)$$

Wystarczy pokazać że

$$L_2 - L_1^2 \geq 0 \quad \text{czyli}$$

$$\int d\tilde{\theta}\, \Pi_{\tilde{\theta}}\, \tilde{\theta}^2 - \left(\int d\tilde{\theta}\, \Pi_{\tilde{\theta}}\, \tilde{\theta}\right)^2 \geq 0$$

Ale to wynika z tego że f. x^2 jest operatorowo wypukła. (Wypukłość operatorowa)

2.[Problemy z symetrią

Niech G pewna grupa, np. $U(1)$, $SU(2)$, ...
Tym co będziemy estymować będą elementy grupy $g \in G$
np. faza dla grupy $U(1)$, obrót dla $SU(2)$, ...
Niech U_g oznacza pewną reprezentację unitarną grupy G:
$$U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}$$

Warunki:

a) $$\rho_g = U_g \rho_e U_g^\dagger$$ ~ rodzina stanów generowana przez repr. grupy

(ρ_e – ustalony stan)

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle) = e^{i\varphi\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]} \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

ustalony stan — repr. grupy

np. $|\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right) = \underbrace{e^{i\varphi\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}}_{U_\varphi}\underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)}_{|\psi_0\rangle}$

U_φ — repr. grupy $U(1)$

b) $\forall_{g_1,g_2,g}\; C(g_1, g_2) = C(hg_1, hg_2)$

f. kosztu — lewo niezmiennicza wzgl. działania grupy

np. $C(\varphi_1, \varphi_2) = C(\varphi_1 - \varphi_2) = C\left((\varphi_1 + \xi) - (\varphi_2 + \xi)\right)$

różnica faz niezmiennicza wzgl. działania $U(1)$

c) rozkład apriori niezmienniczy wzgl. działania grupy

$\forall_{g,h}\; dg\, p(g) = d(hg)\, p(hg)$

np. • $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$: $\quad d\varphi \frac{1}{2\pi} = \underbrace{d(\varphi + \xi)}_{d\varphi}\frac{1}{2\pi}$

translacja nie zmienia różniczki.

• $d\theta\, d\varphi\; p(\theta, \varphi)$ — jaka musi być $p(\theta,\varphi)$ żeby była miara niezmiennicza na sferze wzgl. obrotów

$p(\theta, \varphi) = \sin\theta$

Czyli unormowana miara:

$\frac{1}{4\pi} d\theta\, d\varphi \sin\theta = d\mu_{\theta,\varphi}$

Ogólnie $dg\, p(g) = d\mu_g$ - miara Haara

Odtąd pisząc dg będziemy mieli na myśli miarę Haara unormowaną $\int_{g\in G} dg = 1$

Czyli w tej sytuacji $p(g) = 1$.

Średni koszt dla problemów z symetrią:

$$\overline{C} = \int dg \, d\tilde{g} \; \mathrm{Tr}(U_g \varrho_e U_g^\dagger \Pi_{\tilde{g}}) \, C(g, \tilde{g})$$

miary Haara grupy G

2.3 Pomiary kowariantne

Definicja

$\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ nazywamy kowariantnym względem grupy G $\Leftrightarrow \forall_{\tilde{g}, h} \; U_h \Pi_{\tilde{g}} U_h^\dagger = \Pi_{h\tilde{g}}$

Wniosek:

Jeśli $\{\Pi_{\tilde{g}}\}$ jest kowariantny to

$$\Pi_{\tilde{g}} = U_{\tilde{g}} \Pi_e U_{\tilde{g}}^\dagger$$

Innymi słowy pomiar kowariantny w pełni określony przez podanie jednego operatora Π_e

Twierdzenie

Jeśli problem optymalnej estymacji ma symetrię wzgl grupy G

$\left(dg - \text{miara Haara}, \; C(hg, hg') = C(g, g'), \; \varrho_g = U_g \varrho_e U_g^\dagger \right)$

Optymalny pomiar można zawsze znaleźć pośród pomiarów kowariantnych wzgl grupy G

Dowód

Niech $\Pi_{\tilde g}^{opt}$ będzie optymalnym pomiarem minimalizującym $\bar C$:

$$C_{min} = \int dg\, d\tilde g\, \mathrm{Tr}\left(\Pi_{\tilde g}^{opt} \rho_g\right) C(g,\tilde g)$$

Zdefiniujmy

$$\Pi_{\tilde g}^{cov} = \int dg'\, U_{g'}^{\dagger} \Pi_{g'\tilde g}^{opt} U_{g'}$$

Po pierwsze $\Pi_{\tilde g}^{cov}$ jest kowariantny:

$$U_h \Pi_{\tilde g}^{cov} U_h^{\dagger} = \int dg'\, U_{hg'^{-1}} \Pi_{g'\tilde g}^{opt} U_{g'h^{-1}}$$

$$\underset{=}{\overset{g' \to g'h}{}} \int dg'\, U_{g'} \Pi_{g'h\tilde g}^{opt} U_{g'} = \Pi_{h\tilde g}^{cov}$$

Po drugie daje ten sam koszt co $\Pi_{\tilde g}^{opt}$:

$$C_{cov} = \int dg\, d\tilde g\, \mathrm{Tr}\left(\Pi_{\tilde g}^{cov} \rho_g\right) C(g,\tilde g) =$$

$$= \int dg\, d\tilde g\, \mathrm{Tr}\left(\int dg'\, U_{g'}^{\dagger} \Pi_{g'\tilde g}^{opt} U_{g'} U_g \rho_e U_g^{\dagger}\right) C(g,\tilde g)$$

$$= \int dg\, d\tilde g\, dg'\, \mathrm{Tr}\left(U_{g'g}^{\dagger} \Pi_{g'\tilde g}^{opt} U_{g'g} \rho_e\right) C(g,\tilde g)$$

$$\begin{cases} g \to g'^{-1} g \\ \tilde g \to g'^{-1} \tilde g \end{cases}$$

$$= \int dg\, d\tilde g\, dg'\, \mathrm{Tr}\left(U_g^{\dagger} \Pi_{\tilde g}^{opt} U_g \rho_e\right) F\left(g'^{-1} g, g'^{-1} \tilde g\right) =$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, dg'\; Tr(\Pi_{\tilde{g}}^{opt}\, \rho_g)\, F(g,\tilde{g}) \quad = F_{opt}$$ ■

Problem mamy. więc uprościć

$$\bar{C} = \int dg\, d\tilde{g}\; Tr(\Pi_{\tilde{g}}\, \rho_g)\, C(g,\tilde{g}) =$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\; Tr\left(U_{\tilde{g}}\, \Pi_e\, U_{\tilde{g}}^\dagger\, U_g\, \rho_e\, U_g^\dagger \right) C(g,\tilde{g})$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\, \left(Tr\left(U^\dagger_{\tilde{g}^{-1} g}\; \Pi_e\; U_{\tilde{g}^{-1} g}\; \rho_e \right) C(g,\tilde{g}) \right.$$

$$\left\{ \; g \to \tilde{g} g \right.$$

$$= \int dg\, d\tilde{g}\; Tr\left(U_g^\dagger\, \Pi_e\, U_g\, \rho_e \right) F(g,e)$$

$$C = \int dg\; Tr(\Pi_e\, \rho_g)\, F(g,e)$$

Końcowo postać problemu

$$\boxed{\begin{gathered} \bar{C} = \int dg\; Tr(\Pi_e\, \rho_g)\, C(g,e) \\ \min_{\Pi_e \geq 0} \bar{C}, \quad \int dg\, U_g \Pi_e U_g^\dagger = \mathbb{1} \end{gathered}}$$

minimalizacja już tylko po jednym operatorze !

2.4 Optymalna estymacja fazy qubitu na równiku sfery Blocha mając N kopii

$$\rho_\varphi^{(N)} = |\psi_\varphi\rangle\langle\psi_\varphi|^{\otimes N} \qquad |\psi_\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\right) =$$

$$= \underbrace{e^{i\varphi\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}}}_{U_\varphi} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)$$

$$\rho_\varphi^{(N)} = U_\varphi^{\otimes N}\, \rho_0^{(N)}\, U_\varphi^{\otimes N \dagger} \qquad \rho_0^{(N)} = \left[\frac{1}{2}\left(|0\rangle+|1\rangle\right)\left(\langle 0|+\langle 1|\right)\right]^{\otimes N}$$

$$C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4\sin^2\left(\frac{\varphi-\tilde{\varphi}}{2}\right) \qquad p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$$

$$\overline{C}^{(N)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(N)} \rho_\varphi^{(N)}\right) 4\sin^2\frac{\varphi}{2} =$$

$$\overline{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(N)} \int d\varphi\, \rho_\varphi^{(N)} \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

- $N=1$

$$\overline{C}^{(1)} = \frac{2}{\pi}\operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \int_0^{2\pi} d\varphi \underbrace{\sin^2\frac{\varphi}{2}}_{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{i\varphi}-\frac{1}{4}e^{-i\varphi}\right)} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & e^{-i\varphi}\\ e^{i\varphi} & 1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \cdot \begin{bmatrix}\pi & -\frac{\pi}{2}\\ -\frac{\pi}{2} & \pi\end{bmatrix}\right) = \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)} \begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right)$$

Szukamy $\min_{\Pi_0^{(1)}} \operatorname{Tr}\left(\Pi_0^{(1)}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\right)$ z więzami

$$\int U_\varphi \Pi_0^{(1)} U_\varphi^\dagger \frac{d\varphi}{2\pi} = \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}, \qquad \Pi_0^{(1)} \geq 0$$

$$\Pi_0^{(1)} = \begin{bmatrix}a & b\\ \dots\end{bmatrix} \qquad U_\varphi \Pi_0^{(1)} U_\varphi^\dagger = \begin{bmatrix}a & b e^{-i\varphi}\\ b^* e^{i\varphi} & \dots\end{bmatrix}$$

$$\Pi_c^{(1)} = \begin{bmatrix} a & b \\ b^* & c \end{bmatrix} \qquad U_\varphi \Pi_c^{(1)} U_\varphi^\dagger = \begin{bmatrix} a & b e^{-i\varphi} \\ b^* e^{i\varphi} & c \end{bmatrix}$$

$$\int \frac{d\varphi}{2\pi} \begin{bmatrix} a & b e^{-i\varphi} \\ b^* e^{i\varphi} & c \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} a = 1 \\ c = 1 \end{matrix}$$

$$\Pi_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b^* & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{żeby } \Pi_c^{(1)} \geq 0 \quad |b| \leq 1$$

$$\min_{|b|\leq 1} \left(\mathrm{Tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & b \\ b^* & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right) \right) =$$

$$= \min_{|b|\leq 1} \mathrm{Tr} \left(2 - \mathrm{Re}\, b \right) = 1 \quad \text{dla} \quad b = 1$$

Czyli $\Pi_c^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2\, |+\rangle\langle +|$

Zwróćmy uwagę że $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} = |+\rangle\langle +| + 2|-\rangle\langle -|$

Czyli $\Pi_c^{(1)}$ „rzut" na najmniejszą wart. własną $\int d\varphi\, \rho_\varphi \sin^2\frac{\varphi}{2}$

Czyli $\Pi_{\tilde\varphi}^{(1)} = 2\, |\psi_{\tilde\varphi}\rangle\langle \psi_{\tilde\varphi}|$

Mamy POVM będące rzutami (nieortogonalnymi !?) na wszystkie stany równikowe.

$$\overline{C}^{(1)} = 1$$

<u>Uwaga</u>: taki sam średni koszt dostalibyśmy dla naiwnej strategii: $\Pi_0 = |+\rangle\langle +|$ $\Pi_1 = |-\rangle\langle -|$;

$$\tilde\varphi(0) = 0 \qquad \tilde\varphi(1) = \pi$$

• $N > 1$

$$\overline{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Tr}\Big(\Pi_0^{(N)} \overbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi\, \sin^2\frac{\varphi}{2}\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & e^{-i\varphi}\\ e^{i\varphi} & 1\end{bmatrix}\right)^{\otimes N}}^{A}\Big)$$

mamy $\Pi_0^{(N)} = |+\rangle\langle+|^{\otimes N}\cdot 2^N$ $\{$ op na 2^N wymiarowa przestrzenia

$\overline{C}^{(N)} =$

Zauważmy że stan $|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N} \in \underset{\substack{\uparrow\\ \text{podprzestrzeń symetryczna (bozonowa)}}}{\mathcal{H}_S^{\otimes N}} \subset \mathcal{H}^{\otimes N}$

$$|\psi_\varphi\rangle^{\otimes N} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^N \big(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\big) = \sum_{n=0}^{N} c_n e^{in\varphi}|n\rangle_S$$

gdzie $|n\rangle = \sum_{perm} |\underbrace{00\ldots0}_{N-n}\underbrace{1\ldots1}_{n}\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{\binom{N}{n}}}$ — $N+1$ wekt. bozonowych

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{2^N}}\sqrt{\binom{N}{n}}$$

W bazie $|n\rangle_S$:

$$\rho_\varphi^{(N)} = \frac{1}{2^N}\sum_{n,n'}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n'}}\, e^{i(n-n')\varphi}\, |n\rangle_S {}_S\langle n'|$$

$$A = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^{i\varphi} - \frac{1}{4}e^{-i\varphi}\right)\frac{1}{2^N}\sum_{n,n'}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n'}}\, e^{i(n-n')\varphi}\, |n\rangle_S {}_S\langle n'|$$

$$= \frac{1}{2^N}\cdot\left(\pi\sum_n \binom{N}{n}|n\rangle_S {}_S\langle n| - \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\binom{N}{n}\binom{N}{n-1}}\big(|n\rangle_S {}_S\langle n-1| + |n-1\rangle_S {}_S\langle n|\big)\right)$$

$$
= \frac{\pi}{2^N}\cdot
\begin{pmatrix}
\binom{N}{0} & -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{0}\binom{N}{1}} & 0 & \cdots & 0 \\
-\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{0}\binom{N}{1}} & \binom{N}{1} & -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{1}\binom{N}{2}} & & \\
0 & -\frac{1}{2}\sqrt{\binom{N}{1}\binom{N}{2}} & \ddots & & \ddots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \\
0 & & & & \binom{N}{N}
\end{pmatrix}
$$

Szukamy optymalnego $\Pi_0^{(N)}$. Wystarczy określić go na $\mathcal{H}_s^{\otimes N}$ bo pozostałe nic nie dają wkładu. Z warunku $\int \frac{d\varphi}{2\pi} U_\varphi \Pi_{0,s}^{(N)} U_\varphi = \mathbb{1}_s$

wynika
$$
\Pi_{0,s}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}
$$

Żeby były dodatnie wyrazy pozadiagonalne $|\cdot| \leq 1$

Ponieważ w A wszystkie niezerowe pozadiagonalne ujemne, to uzyskamy najmniejszą wartość biorąc

$$
\Pi_{0,s}^{(N)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \left(|0\rangle_s + \dots |N\rangle_s\right)\left({}_s\langle 0| + \dots {}_s\langle N|\right)
$$

Wtedy:
$$
\bar{C}^{(N)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2^N}\left[\sum_{m=0}^{N}\binom{N}{m} - \sum_{m=1}^{N}\sqrt{\binom{N}{m}\binom{N}{m-1}}\right] =
$$
$$
= \left[2 - \frac{1}{2^{N-1}}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{\binom{N}{m}\binom{N}{m-1}}\right]
$$

W granicy $N \to \infty$:

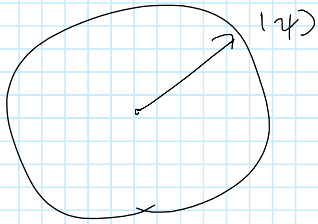
$$\frac{1}{2^{N-1}} \sum_{m=1}^{N} \frac{N!}{\sqrt{m!(N-m)!\,(m-1)!(N-m+1)!}} = \frac{1}{2^{N-1}} \sum_{m=1}^{N} \frac{N!}{m!(N-m)!} \sqrt{\frac{m}{N-m+1}} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{N\to\infty} 2 - \frac{1}{N} \qquad \overline{C}^{(N)} \to \frac{1}{N}$$

czyli to co widzieliśmy z QCR.

2.4 Optymalna estymacja całkowicie nieznanego ($\hat{\Theta}$) stanu qubitu

$$|\psi\rangle = |\theta, \varphi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{i\varphi}|1\rangle =$$
$$= e^{-\frac{i\varphi}{2}} \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}}|1\rangle$$



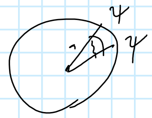
$$|\psi\rangle = |\theta, \varphi\rangle = \underbrace{e^{i\varphi\frac{1}{2}\sigma_z} e^{i\theta\frac{1}{2}\sigma_y}}_{U_{\theta,\varphi} = U_\psi \quad G = SU(2)/U(1)} |0\rangle$$

obroty wybranego wektora na sferze

Miara Haara $\frac{1}{4\pi} d\theta\, d\varphi \sin\theta =: d\psi$

Funkcja kosztu: $C(\psi, \tilde{\psi}) = 4\cdot\left(1 - |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2\right)$

$$\begin{cases} |\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle|^2 \approx \cos^2\frac{\vartheta}{2} & \text{dla małych kątów:} \\ C = 4\cdot\sin^2\frac{\vartheta}{2} \approx \vartheta^2 \end{cases}$$



Przyjmijmy, że mamy N kopii: $\rho_\psi = |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}$

$$\overline{C} = \int d\psi \; \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \; |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}\right) \; 4\left(1 - |\langle\psi|0\rangle|^2\right)$$

$$\min_{\Pi_e} \overline{C} \; , \quad \Pi_e \geq 0 \; , \quad \int d\psi \; U_\psi^{\otimes N} \, \Pi_e \, U_\psi^{\otimes N \dagger} = \mathbb{1}$$

$$= 4\Big(1 - \underbrace{\int d\psi \; \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \; |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}\right) |\langle\psi|0\rangle|^2}_{F}\Big)$$

Chcemy zmaksymalizować F. Zauważmy, że skoro $|\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N} \in \mathcal{H}_s^{\otimes N}$. I możemy ograniczyć nasze rozważania do Π_e na tej przestrzeni

$$F = \int d\psi \; \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \; |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N}\right) \cdot \mathrm{Tr}\left(|0\rangle\langle 0| \, |\psi\rangle\langle\psi|\right) =$$

$$= \int d\psi \; \mathrm{Tr}\left(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N+1}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\Big(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \cdot \underbrace{\int d\psi \; |\psi\rangle\langle\psi|^{\otimes N+1}}_{A}\Big)$$

A = op na przestrzeni $\mathcal{H}_s^{\otimes N}$ o śladzie

$\mathrm{Tr}\, A = 1$ i niezmienny wzgl. działania

najpierw nieprzywiedlnej reprezentacji $SU(2)$, o wymiarze $N+2$

Czyli $A = \frac{1}{\;} \mathbb{1}_{\otimes N+1}$

$$N+2 \quad \mathcal{H}_S$$

$$= \frac{1}{N+2} \operatorname{Tr}\left(\Pi_e \otimes |0\rangle\langle 0| \quad \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S^{\otimes N+1}} \right)$$

$$\int U_4^S \, \Pi_e \, U_4^{S\dagger} = \mathbb{1}_{\mathcal{H}_S^{\otimes N}} \qquad \operatorname{Tr} \Pi_e = N+1$$

Maksimum uzyskamy biorąc $\Pi_e = |0\rangle\langle 0|^{\otimes N} (N+1)$

Wtedy $F = \frac{N+1}{N+2}$

Minimalny koszt:

$$\boxed{\overline{C}^{(N)} = 4\left(1 - \frac{N+1}{N+2}\right)}$$