

# IV Metrologia kwantowa

Wykorzystanie nielokalnych własności światła, atomów tj. np. splątanie, do zwiększenia precyzji pomiarów przedstawionych własności fizycznych: kolekcji

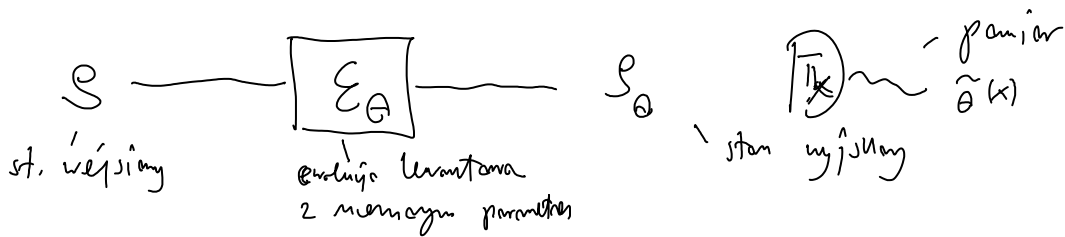
czas, pole magnetyczne, ...

- interferometry lub gromadzących (staż ścieżki światła)

- zegary atomowe (kilka jonów w st. splątanych)

## 1. Estymacja parametrów kłamów kwantowego

Wiele problemów w metrologii. Kwantowej sprawochić się do estymacji parametrów kłamów kwantowego



ogólnie:

$$S_\theta = E_\theta(S) = \sum_i K_i^\theta S K_i^{\theta\dagger}$$

My się na razie skupimy na kłamach unitarych

$$E_\theta(S) = U_\theta S U_\theta^\dagger, \quad U_\theta = e^{iH\theta}$$

Estymacja parametrów ewolucji  $\varphi(\rho_0)$ ,  $H$  - hamiltonian

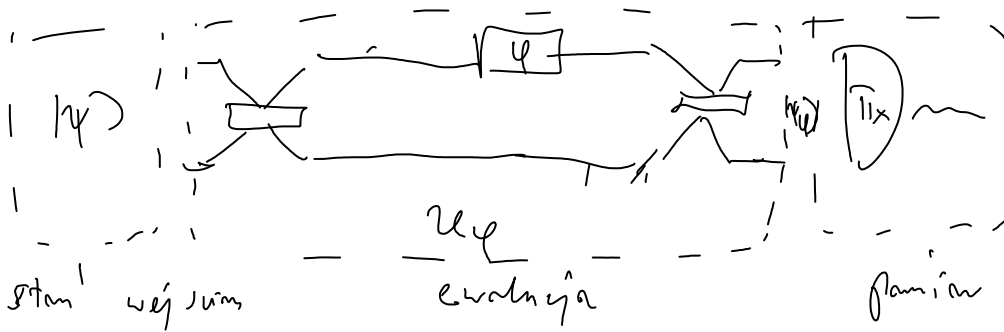
Problem: znaleźć  $S$ ,  $\{K_i^\theta\}$ ,  $\tilde{\varphi}(x)$  żeby zminimalizować SEP

Zawsze lepiej brać st. czyste niż wejściowe  $S = |\psi\rangle\langle\psi|$

Problem:  $\min_{|\psi\rangle} \Delta\varphi$

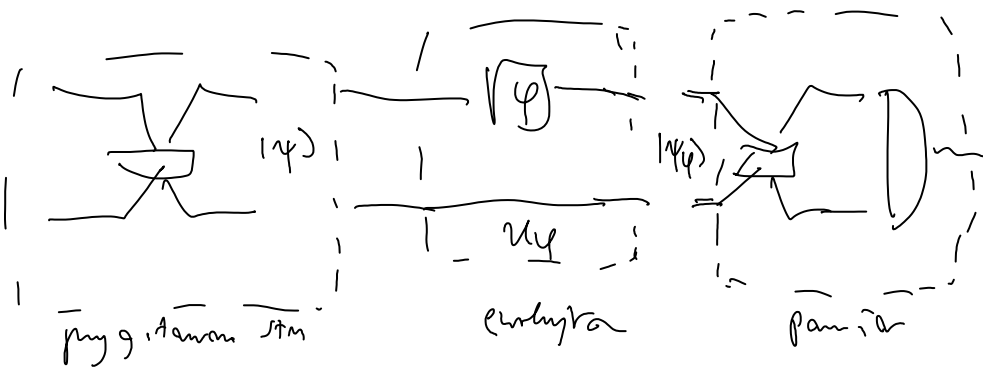
W parametryzacji z estymacją stanu dodatkowa funkcja...  
 - wybór optymalnego stanu wejściowego

Przykład Interferometr (jeden lot) ...



$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$  - superpozycja stanów w górnym, dolnym ramieniu

wygodniej myśleć



$U_\varphi = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  w bazie  $|0\rangle, |1\rangle$

$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle \xrightarrow{U_\varphi} |\psi_\varphi\rangle = a e^{i\varphi} |0\rangle + b |1\rangle$

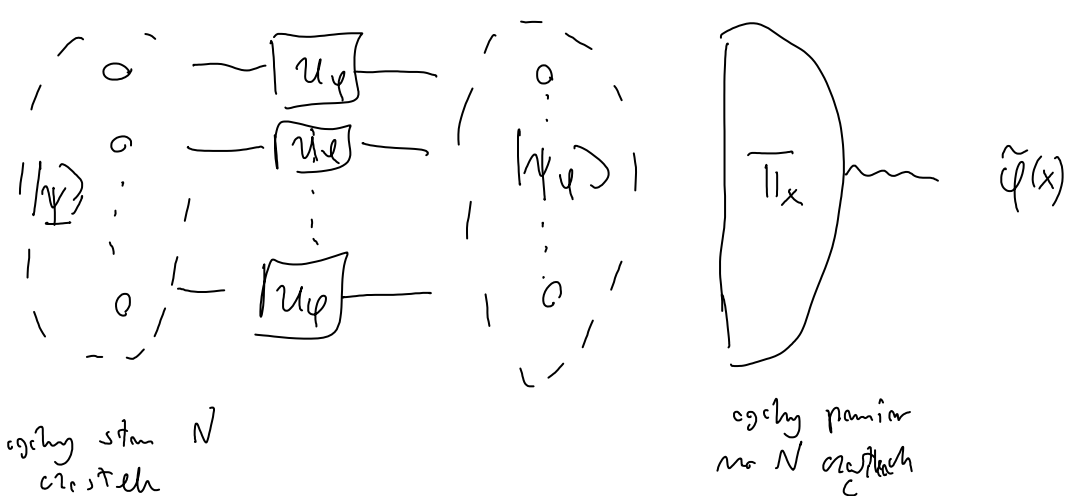
Jaki stan wejściowy naj lepszy:

stan z równymi słęży Blocha  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$

## 2. Estymacja parametrów na $N$ niezależnych kwantach

W praktyce interesują nas przede wszystkim  
 przy pomocy wielu układów kwantowych: łańcuch atomów  
 np. interakujących ze światłem o ustalanej (średniej)  
 energii — kubit łańcuch.

Mamy  $N$  - układów przybliżonych, które możemy przygotować  
 w dowolnym stanie kwantowym; pomiarowy przez równoległe  
 kwanty:



$$|\psi_\phi\rangle = U_\phi^{\otimes N} |\psi\rangle$$

$$p(x|\phi) = \langle \psi_\phi | \Pi_x | \psi_\phi \rangle$$

- Jeśli są optymalne stany na wejściu  $i$
- Jednego układu możemy się spodziewać w parzym  
 ze strategiami „klasyfikacji”:  $|\psi\rangle = |\psi\rangle^{\otimes N}$

Rozważmy kwanty portali  $U_\phi = e^{iH\phi}$

### 2.1 Podjęcie przez kwantowe inf. Fishera

Wiem że mając określone stany  $|\psi_\phi\rangle$   
 w stanie uzyskać lepszą estymację niż

$$\Delta\varphi \geq \frac{1}{\sqrt{F}} \quad F = \varphi(\langle \psi_\varphi | \psi_\varphi \rangle - \langle \psi_\varphi | \hat{x} | \psi_\varphi \rangle)$$

$$|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\otimes N} |\Psi\rangle = \left( e^{iH\varphi} \right)^{\otimes N} |\Psi\rangle =$$

$$= e^{i \sum_{k=1}^N H^{(k)} \varphi} |\Psi\rangle = e^{iH_N \varphi} |\Psi\rangle$$

$$\left\{ H^{(k)} = \begin{matrix} \uparrow & \dots & \alpha H \alpha & \dots & \uparrow \\ & & \text{k-te miejsce} & & \end{matrix} \right., \quad H_N = \sum_{k=1}^N H^{(k)}$$

$$F = \varphi \left( \langle \psi_\varphi | H_N^2 | \psi_\varphi \rangle - \left( \langle \psi_\varphi | H_N | \psi_\varphi \rangle \right)^2 \right) =$$

$$= \varphi \Delta^2 H_N$$

Szukamy stanu który zrealizuje najmniejszą wariancję Hamiltonianu  $H_N$ .

Fakt Maksymalna wariancja  $H$  uzyskana biorąc superpozycję stanów odpowiadających skrajnym wart. własnym

$$|\psi^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\lambda^{\min}\rangle + |\lambda^{\max}\rangle \right)$$

$$\left\{ \langle \psi | H^2 | \psi \rangle - \langle \psi | H | \psi \rangle^2 = \frac{1}{2} (\lambda^{\max 2} + \lambda^{\min 2}) - \frac{1}{4} (\lambda^{\max} + \lambda^{\min})^2 \right.$$

$$\text{Wtedy: } \Delta^2 H = \frac{1}{4} (\lambda^{\max} - \lambda^{\min})^2$$

Jeli  $\lambda^{\max}$  to max  $H$  to max  $H_N$

$$\lambda_N^{\max} = N \cdot \lambda^{\max}$$

$$\text{czyli optymalny stan } |\psi_{\perp}^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\lambda^{\max}\rangle_{\perp} + |\lambda^{\min}\rangle_{\perp} \right)$$

1 stan splatany

... .. 2 1 1

Czyli  $F = 4 N^2 \Delta^2 H$

$$\Delta \varphi \geq \frac{1}{2N \Delta H} \quad \begin{array}{l} \text{składowa precyzyj} \frac{1}{N} \\ \text{składowa Heisenberga} \end{array}$$

Jeśli mamy więcej fotonów tylko więcej.

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle^{\otimes N} \quad \text{to}$$

$$\Delta^2 H_N = \sum_k \Delta^2 H = N \cdot \Delta^2 H = N \frac{1}{4} (\lambda^{\max} - \lambda^{\min})^2$$

$$\Delta \varphi \geq \frac{1}{2\sqrt{N} \Delta H} \quad \text{składowanie „krytyczne”}$$

Przykład N fotonów w interferometrze

$$U = \begin{pmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_{\max} = 1 \\ \lambda_{\min} = 0 \end{array}$$

$$|\Psi^{\text{opt}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|111\dots 1\rangle + |000\dots 0\rangle)$$

$$\Delta^2 H = \frac{1}{4} \quad \boxed{\Delta \varphi \geq \frac{1}{N}}$$

Gdyby użyć fotonów nie skorelowanych

$$|\Psi\rangle = |\varphi\rangle^{\otimes N} \quad |\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$$

$$\boxed{\Delta \varphi \geq \frac{1}{\sqrt{N}}}$$

Mamy kwadraty potęgowe tych w  
 precyzji. Instrukcja:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (|0 \dots 0\rangle + |1 \dots 1\rangle) \xrightarrow{U_{\psi}} \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{iN\psi} |0 \dots 0\rangle + |1 \dots 1\rangle)$$

/

N kwadraty niezależne fazy

Dalej mówiąc o interferencjach są to  
 będące użycie nie niezależnych fazy  
 - symetryzacji stanu; przesłanie w  
 obu obszarach  $|n, N-n\rangle$  - n fazy  
 w stanie  $|0\rangle$ ,  $N-n$  w stanie  $|1\rangle$

W takim języku:

o stan optymalny  $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|N, 0\rangle + |0, N\rangle)$  (NCCN)

o stan „klasy” , braku korelacji między partiami!

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N \sqrt{\binom{N}{n}} |n, N\rangle \equiv \left( \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) \right)^{\otimes N}$$

Wniosek Nie jest z góry oczywiste jak  
 w praktyce osiągnąć  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ . NCCN jest dobry  
 tylko jak jest mamy bardzo dobrą wartość  $\psi$   
 strategia etapowa.

2.2 Podjęcie Byłowskiego  
 optymalne stany do estymacji fazy przy braku wiedzy o fazy

n . . . . .

Rozważmy ogólne stany  $N$ -bitowe (stany normalizowane)

$$|\psi\rangle = \sum_m c_m |m, N-m\rangle =: \sum_m c_m |m\rangle$$

$$|\psi_\varphi\rangle = U_\varphi^{\text{sym}} |\psi\rangle = \sum_m c_m e^{im\varphi} |m\rangle$$

Różnica a priori  $p(\varphi) = \frac{1}{2\pi}$ , f. kosztu  $C(\varphi, \tilde{\varphi}) = 4 \sin^2\left(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}\right)$

Chcemy zminimalizować średni koszt

$$C = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \int d\tilde{\varphi} \langle \psi | U_\varphi^\dagger \Pi_{\tilde{\varphi}} U_\varphi | \psi \rangle 4 \sin^2\left(\frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2}\right)$$

to samo strukturalnie co  
własność = inwariantność  
pomiaru wartości ciągłego

Szukamy  $\min_{\Pi_{\tilde{\varphi}}, |\psi\rangle} C$

Wskazując optymalne są pomiary komutujące  $\Pi_{\tilde{\varphi}} = U_{\tilde{\varphi}}^\dagger \Pi_c U_{\tilde{\varphi}}$

$$C = \int \frac{d\varphi}{2\pi} \int \frac{d\tilde{\varphi}}{2\pi} \langle \psi | U_\varphi^\dagger U_{\tilde{\varphi}} \underbrace{\Pi_c}_{U_{\varphi-\tilde{\varphi}}} U_{\tilde{\varphi}}^\dagger U_\varphi | \psi \rangle 4 \sin^2 \frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \langle \psi | \int d\varphi U_\varphi^\dagger \Pi_c U_\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} | \psi \rangle$$

parametry, że  $\int \frac{d\tilde{\varphi}}{2\pi} U_{\tilde{\varphi}}^\dagger \Pi_c U_{\tilde{\varphi}} = \mathbb{1}$  czyli

ciężko discrete  $\Pi_c$  musi być 1. Podobieństwo

ide w przyp. dla estymacji fazy na  $|\psi\rangle^{\otimes n}$  optymalny

$$\text{bardzo } \Pi_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = |0\rangle\langle 0| \quad \hat{\square}$$

$$|0\rangle = \sum_{m=0}^N |m\rangle$$

$$= \frac{2}{\pi} \langle \psi | \int d\varphi U_\varphi^\dagger |0\rangle\langle 0| U_\varphi \frac{1}{2} \left(1 - \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}\right) | \psi \rangle$$

$$= \frac{2}{\pi} \langle \psi | \int d\varphi U_{\varphi}^{\dagger} |e\rangle \langle e| U_{\varphi} \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right) | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | \frac{2}{\pi} \int d\varphi \sum_{m,m'} e^{i(m-m')\varphi} |m\rangle \langle m'| \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{i\varphi} - \frac{1}{4} e^{-i\varphi} \right) | \psi \rangle$$

$$= \langle \psi | 2 \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} | \psi \rangle$$

Suchony wektor wicnego ograniczajace najmniejsza wartosci wicnej. Do sie wzbric amplitudami:

Najmiesz wart wicna:

$$C = \lambda_{\min} = 2 \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \frac{\pi}{N+2} \right) = 2 \left( 1 - \cos \frac{\pi}{N+2} \right)$$

wektor wicny:

$$| \psi \rangle = \sum_{m=0}^N c_m |m\rangle, \quad c_m = \sqrt{\frac{2}{N+2}} \sin \frac{(m+1)\pi}{N+2}$$

Remiujac liczba dla duzych  $N$

$$C \approx 2 \left( 1 - 1 + \frac{\pi^2}{2(N+2)^2} \right) = \frac{\pi^2}{(N+2)^2} \approx \frac{\pi^2}{N^2}$$

Skladame Heisenberga ale z argumentem  $\pi^2$

Zceta: to mo plenu do sie czojmacie najmniejsz temety amle.