# 2. Pomiary uogólnione

Często jest tak, że nie mierzymy bezpośrednio interesującej nas wielkości i pomiar rzutowy nie jest wygodnym opisem.

- pomiar Sterna-Gerlacha. Chcemy mierzyć spin: mamy pełne oddziaływanie spinowych i przestrzennych stopni swobody → pomiar przestrzennych stopni swobody → wnioskowanie o spinowych st. swobody
- Pomiar liczby fotonów realistycznym detektorem (wydajność < 100%, ciemne zliczenia) – „pomiar rozmyty". – to że wyświetli się n nie znaczy że zrzutowaliśmy w stan n fotonowy.

<u>Pomiar uogólniony:</u>

- układ oddziałuje z urządzeniem pomiarowym (opisanym kwantowo)
- obserwator mierzy bezpośrednio stan urządzenia pomiarowego (pomiarem rzutowym)

<u>Opis matematyczny:</u>

$$\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M \longrightarrow U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger$$

układ; stan początkowy urządzenia pomiarowego; oddziaływanie z urządzeniem pomiarowym

Na końcu mierzymy urządzenie pomiarowe w pewnej bazie np. $|i\rangle$: pomiar rzutowy $P_i = |i\rangle\langle i|$

Prawdopodobieństwo wyniku $i$:

$$p_i = Tr( U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \mathbb{1}_S \otimes P_i^M ) =$$

$$= Tr( \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger \mathbb{1} \otimes P_i^M U ) =$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M \, \mathcal{U}^\dagger \mathbb{1} \otimes P_i^M \, \mathcal{U}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}_S\Big( \rho_S \cdot \underbrace{\langle 0|\mathcal{U}^\dagger \mathbb{1}\otimes|i\rangle\langle i|\mathcal{U}|0\rangle}_{\Pi_i^S} \Big)$$

$$= \mathrm{Tr}\left( \rho_S \, \Pi_i^S\right)$$

uogólnione op. pomiarowe (nie koniecznie rzutowe)

$$\sum_i \Pi_i^S = \mathbb{1}_S \,, \quad \Pi_i^S \geq 0 \quad \left(\begin{matrix}\text{POVM} \\ \text{Measurement}\end{matrix}\right)$$

Jawnie

$$\left(\Pi_i^S\right)_{mn} = \langle m|\langle 0|\mathcal{U}^\dagger \mathbb{1}\otimes|i\rangle\langle i|\mathcal{U}|n\rangle|0\rangle$$
$$= \langle \varphi_m|\mathbb{1}\otimes|i\rangle\langle i|\varphi_n\rangle \,, \quad |\varphi_n\rangle = \mathcal{U}|n\rangle|0\rangle$$

Widzimy, że dzięki oddziaływaniu $S+M$ i pomiarom rzutowym na $M$ odpowiada to pełnemu pomiarowi uogólnionemu na $S$ dającemu te same prawdopodobieństwa.

Prawdziwe jest również tw. odwrotne:

Tw. Neumark'a (uwzględniający przypadek)

$\{\Pi_i^S\}$, $i=1\ldots K$ $\quad \Pi_i^S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_d)$ $\quad$ " $\quad$ s

Pokażemy, że istnieje $\mathcal{U} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_{d\otimes K})$ rzutowy $P_i$ który do

$$\forall_{\rho_S} \quad \mathrm{Tr}(\rho_S \Pi_i^S) = \mathrm{Tr}\left(\mathcal{U}\, \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|\, \mathcal{U}^\dagger \, \mathbb{1}_S \otimes P_i^M\right)$$

Z definicji: $\mathcal{U}|\psi\rangle\otimes|0\rangle = \sum_{i=1}^{N} \sqrt{\Pi_i}\, |\psi\rangle|i\rangle$

} $\sqrt{\Pi_i} \geq 0$

spełnia warunek unitarności

$$\left(\sum_i \langle \psi'|\langle i|\sqrt{\Pi_i}\right)\left(\sum_j \sqrt{\Pi_j}\, |\psi\rangle|j\rangle\right) =$$

$$= \langle \psi'|\sum_i \Pi_i|\psi\rangle = \langle \psi'|\psi\rangle = \mathbb{1}$$

$$= \langle\psi'| \sum_i \Pi_i |\psi\rangle = \langle\psi'|\psi\rangle = 0$$

Macierz unitarną na podprzestrzeni zawsze można być rozszerzona do pełnej unitarnej:

$$U = \begin{bmatrix} u^1_1 & \dots & u^1_d & \\ \vdots & \vdots & & ? \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ u^1_N & & u^d_N & \dots \end{bmatrix} \qquad N = d \cdot K$$

dopisujemy ortogonalne $N$-d wektory

OK.

Czy $U$ jednoznaczne? Nie:

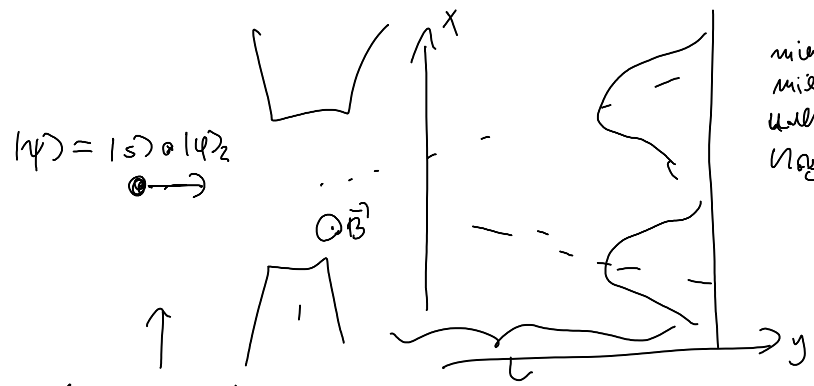
Można wziąć $U|\psi\rangle \otimes |0\rangle = \sum_{i=1}^{N} V_i \sqrt{\Pi_i} |\psi\rangle |i\rangle$ ← unitarna

Oznacza że stan po pomiarze nie jednoznaczny.

Zwróćmy uwagę że w tym przypadku nawet jeśli $\Pi_i$ ortogonalne to i tak możemy mieć unitarny obrót po pomiarze.

Za istotne zdecydowanie stan odpowiada $\sqrt{\Pi_i}$ bo $V_i$ odwracalne. Dokładniej później

## Przykład Eksperyment Sterna-Gerlacha




miejsce uderzenia cząstki z

$$\vec{B} \approx (B_0 + kz)\vec{e}_z$$ – niejednorodne pole w kierunku z w liniowym przybliżeniu spełnia $\nabla B = 0$

$$|s\rangle = c_\uparrow |+\tfrac{1}{2}\rangle_z + c_\downarrow |-\tfrac{1}{2}\rangle_z$$ – nieznany stan spinu

$\underbrace{\quad}_{|+\rangle}$ $\underbrace{\quad}_{|-\rangle}$ w górę ... ma coś $\angle$

$$H = -\mu \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \quad \text{(w trakcie oddziaływania)}$$

Oddziaływanie trwa przez krótki czas $\delta t$ w którym cząstka przelatuje przez pole magnetyczne przy czym przyjmujemy dla uproszczenia że ciągle czuje to samo pole.
Dla uproszczenia przyjmujemy $B_0 = 0$

$|\varphi\rangle_z$ - opisuje przestrzenne stopnie swobody cząstki w kierunku $z$ pozostałe kierunki nie istotne:

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \int dz \, e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2}} |z\rangle$$

Paczka falowa o szerokości $\sigma$.

$$|\varphi_\pm(\delta t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}\mu \cdot k \, \sigma_z \cdot z \, \delta t} |\pm\rangle |\varphi\rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \cdot |\pm\rangle \int dz \, e^{-\frac{z^2}{4\sigma^2} \pm \frac{i\mu k \delta t}{\hbar} z} |z\rangle$$

Następnie przechodzi na swobodną ewolucję przez czas $T = \frac{L}{v}$ $\Big\}$ dla uproszczenia $T$ nie zależy od kierunku.

Przypomnijmy jaka ewolucję

$$\psi(z) = e^{-a\cancel{x}^2 + ib\cancel{x}}$$

$$|\psi\rangle = \int dz \, e^{-a\cancel{x}^2 + ib\cancel{x}} |z\rangle = \int dp\, d\cancel{x} \, e^{-a\cancel{x}^2 + ib\cancel{x}} \, e^{\frac{ip\cancel{x}}{\hbar}} |p\rangle \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$= \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} |p\rangle \int d\cancel{x} \, e^{-az^2 + iz\left(b + \frac{p}{\hbar}\right)} =$$

$$= \int \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} |p\rangle \int dz \, e^{-a\left(z - \frac{i\left(b + \frac{p}{\hbar}\right)}{2a}\right)^2} \cdot e^{-\left(b + \frac{p}{\hbar}\right)^2 \cdot \frac{1}{4a}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp\, |p\rangle \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-\left(\frac{p+b\hbar}{2\hbar}\right) \frac{1}{a}}$$

$$|\Phi_{\pm}(\delta t)\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} \quad |\pm\rangle \otimes \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\hbar}} \int e^{-\left(\frac{p \pm \mu k \delta t}{\hbar}\right)^2 \sigma^2} |p\rangle\, dp$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{(2\pi\sigma_p^2)^{\frac{1}{4}}}}_{N} \cdot \quad |\pm\rangle \otimes \int e^{-\frac{(p \pm \overbrace{\mu k \delta t}^{\alpha})^2}{4\sigma_p^2}} |p\rangle$$

Swobodna ewolucja:

$$|\psi\rangle = \int \psi(p)\, |p\rangle \longrightarrow \int \psi(p)\, e^{-\frac{ip^2}{2m\hbar}T}$$

$$|\psi_{\pm}(\delta t + T)\rangle = N \quad |\pm\rangle \otimes \int e^{-\frac{(p\pm\alpha)^2}{4\sigma_p^2} - \frac{ip^2 T}{2m\hbar}} |p\rangle$$

Wracamy do repr. położeniowej

$$\int e^{-a(p+\alpha)^2 - ibp^2} |p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-ap^2 - ib(p-\alpha)^2}\, e^{-\frac{i(p-\alpha)z}{\hbar}} |z\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{-(a+ib)p^2 + ip\left(2\alpha b - \frac{z}{\hbar}\right) - ib\alpha^2 + \frac{i\alpha z}{\hbar}} |z\rangle\, dz\, dp$$

$$= \frac{e^{-ib\alpha^2}}{\sqrt{2\hbar(a+ib)}} \int dz\; e^{-\frac{\left(2\alpha b - \frac{z}{\hbar}\right)^2}{4(a+ib)} + \frac{i\alpha z}{\hbar}} |z\rangle$$

W naszym przypadku $a = \frac{1}{4\sigma_p^2} \quad b = \frac{T}{2m\hbar}$

$$= \frac{e^{-\frac{i\alpha^2 T}{2m\hbar}}}{\sqrt{2\hbar\left(\frac{\sigma^2}{\hbar^2} + i\frac{T}{2m\hbar}\right)}} \int e^{-\frac{\left(\frac{T}{m}\cdot\alpha - z\right)^2}{4\left(\sigma^2 + i\frac{T\hbar}{2m}\right)}} e^{\frac{i\alpha z}{\hbar}}$$

$$= \left(\frac{4\sigma^2}{\ldots}\right)^{\frac{1}{4}} \cdot |\pm\rangle \otimes \; e^{-\frac{\left(z \mp \frac{T}{m}\alpha\right)^2}{4\sigma_T^2}} \cdot e^{\frac{\pm i\alpha z}{\hbar}} |z\rangle$$

$$= \left( \frac{4\sigma^2}{2\pi \cancel{\hbar^2} (\cancel{4\hbar^2}) \left(\frac{\sigma^2}{\cancel{\hbar^2}} + i\frac{T\hbar}{2m}\right)^2} \right) \cdot |t\rangle \otimes e^{-\int \frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)}{4\sigma_T^2}} \cdot e^{\frac{\dots}{\hbar}} |z\rangle$$

$$= \underbrace{\left( \frac{\sigma^2}{2\pi \sigma_T^4} \right)^{\frac{1}{4}}}_{N_T} \cdot \quad |t\rangle \otimes \int e^{-\frac{(z\pm\frac{T}{m}\alpha)^2}{4\sigma_T^2} \pm \frac{i\alpha z}{\hbar}} |z\rangle$$

$$\sigma_T^2 = \sigma^2 + i\frac{T\hbar}{2m}$$

Chcemy opisać to jako pomiar uogólniony:

$$(\Pi_z)^n_m = \langle \varphi_n | \, \overline{1} \otimes |z\rangle\langle z| \, |\varphi_m\rangle \quad n,m = +,-$$

op. pomiaru od p pomiaru $|z\rangle$

$$\frac{1}{\sigma_T^2} = \frac{1}{\sigma^2 + \frac{iT\hbar}{2m}} = \frac{\sigma^2 - \frac{iT\hbar}{2m}}{\underbrace{\sigma^4 + \left(\frac{T\hbar}{2m}\right)^2}_{|\sigma_T|^4}}$$

$$(\Pi_z)^+_+ = |N_T|^2 \, e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{2|\sigma_T|^4}\sigma^2} \qquad |N_T|^2 = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}|\sigma_T^2|}$$

$$(\Pi_z)^-_- = |N_T|^2 \, e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{2|\sigma_T|^4}\sigma^2}$$

$$(\Pi_z)^+_- = (\Pi_z)^-_+ = 0$$

$$\Pi_z = \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}|\sigma_T^2|} \begin{pmatrix} e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{2|\sigma_T|^4}\sigma^2} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{2|\sigma_T|^4}\sigma^2} \end{pmatrix}$$

$$\int \Pi_z \, dz = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest dodatnie: $\Pi_z \geq 0$

Jeśli rozmywanie pionów położenia mniej zbyt duże $\frac{Th}{2m} \ll \sigma$ to

$$\Pi_z = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \begin{bmatrix} e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{2\sigma^2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{2\sigma^2}} \end{bmatrix}$$

Np. pomiar $\Pi_0$ nic nie mówi o spinie bo nic nie mierzy $\alpha \ll 1$ wszystkie stany generują ten wynik z równym prawdopodobieństwem.

Jeśli $\frac{T}{m}\alpha \gg \sigma$ wtedy pomiar jednoznaczny $|+\rangle, |-\rangle$

Dowiadujemy się tyle i z pomiaru ostrego

Jeśli $\frac{T}{m}\alpha \ll \sigma$ wtedy pomiar praktycznie nic nie mówi o wartości spinu

## Stan układu po pomiarze uogólnionym

$$\rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M \longrightarrow U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger \xrightarrow{\text{pomiar } |i\rangle_M}$$

$$\xrightarrow{1 \otimes |i\rangle\langle i|} 1 \otimes |i\rangle\langle i|_M U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger 1 \otimes |i\rangle\langle i|_M$$

Stan układu jeśli pomiar dał wynik $|i\rangle\langle i|$

$$\rho_S^{(i)} = \mathrm{Tr}_M \left(1 \otimes |i\rangle\langle i|_M U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0|_M U^\dagger 1 \otimes |i\rangle\langle i|_M\right) =$$

$$= \underbrace{\langle i| U |0\rangle}_{K_i} \rho_S \underbrace{\langle 0| U^\dagger |i\rangle}_{K_i^\dagger}$$

$$\text{ślad} = \mathrm{Tr}\,\rho_S^{(i)} = \mathrm{Tr}(\rho_S \underbrace{K_i^\dagger K_i}_{\Pi_i}) = p_i$$

Stan unormowany: pod warunkiem wyniku $i$ ($\Pi_i$)

$$\underbrace{\rho_S^{(i)} = \frac{1}{p_i} K_i \rho_S K_i^\dagger}, \quad K_i = \underbrace{V_i}_{\text{nie istotne zaburzenie}} \underbrace{\sqrt{\Pi_i}}_{\text{istotne zaburzenie stanu}}$$

Uwaga: Nie mamy własności „Repeatability" bo pomiary nieortogonalne w ogólności !

Jeśli na wejściu stan czysty $\rho_S = |\psi\rangle\langle\psi|$ to
$\rho_S^{(i)} = |\psi^{(i)}\rangle\langle\psi^{(i)}|$ $\quad |\psi^{(i)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_i}} K_i |\psi\rangle$

Zauważmy że zadane $\{\Pi_i\}$ wyznacza $\{K_i\}$ jedynie z dokładnością do unitarnej $K_i \cdot U_i$

Intuicyjne – wynikające wynik pomiaru możemy unitarnie obrócić stan po pomiarze – – nie zmieni to statystyki

## Dekoherencja

Jeśli układ z którym oddziałuje układ to nie uważamy pomiarowe – nie mamy dostępu do wyniku pomiaru, sum ...
Wtedy stan układu:

$$\rho_S^{out} = \sum_i K_i \rho_S K_i^\dagger = \quad , \quad \sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{1}$$

$$= \mathrm{Tr}_M ( U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^\dagger )$$

Ogólna postać ewolucji: układu w kontakcie z otoczeniem. CP – map.
W ogólności stan czysty $\to$ mieszany
Szczególny przypadek $\rho_S^{out} = U \rho_S U^\dagger$ ewolucja unitarna

Przykład Stern–Gerlach exp. c.d.

Znajdźmy op. Krausa ewolucji

$$(K_i)^n_m = \langle n|\langle i|\mathcal{U}|0\rangle|m\rangle \qquad n,m = \pm$$

$$(K_z)^n_m = \langle n|\langle z|\,|\varphi_m\rangle$$

$$K_z = \begin{bmatrix} \langle +|\langle z|\cdot|\varphi_+\rangle & \langle +|\langle z|\,|\varphi_-\rangle \\ \langle -|\langle z|\,|\varphi_+\rangle & \langle -|\langle z|\,|\varphi_-\rangle \end{bmatrix} =$$

$$= N_T \begin{bmatrix} e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{4\sigma_T^2} + \frac{i\alpha z}{\hbar}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{4\sigma_T^2} - \frac{i\alpha z}{\hbar}} \end{bmatrix}$$

Wynik pomiaru „z" co się dzieje z ogólnym stanem $|s\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$

$$|s^{(z)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{p_z}} K_z|s\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p_z}} N_T \left( c_+ e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{4\sigma_T^2} + \frac{i\alpha z}{\hbar}} |+\rangle + c_- e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{4\sigma_T^2} - \frac{i\alpha z}{\hbar}} |-\rangle \right)$$

Jeśli pomiar „silny" $\frac{T}{m}\alpha \gg \sigma_T$

$$|s^{(z)}\rangle = |\pm\rangle$$

Jeśli pomiar słaby $\frac{T}{m}\alpha \ll \sigma_T$

$$|s^{(z)}\rangle \approx c_+ e^{\frac{i\alpha z}{\hbar}}|+\rangle + c_- e^{-\frac{i\alpha z}{\hbar}}|-\rangle$$

stan nie zaburzony - (obrót unitarny)

Nic się nie dowiedzieliśmy ale też nic nie zaburzyliśmy.

Jeśli nie mamy dostępu do stopni swobody przestrzennych tu:

$$\rho_S^{out} = \int dz\, K_z \rho_S K_z^+ = \int dz\, K_z |s\rangle\langle s| K_z^+ =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}\,|\sigma_T|^2} \begin{bmatrix} \rho_{++} \int e^{-\frac{(z-\frac{T}{m}\alpha)^2}{2|\sigma_T|^4}\sigma^2} & \rho_{+-} \int e^{-\frac{(z^2+\frac{T^2}{m^2}\alpha^2)\sigma^2}{2|\sigma_T|^4}} e^{\frac{2iz\alpha}{\hbar}\left(1-\frac{T^2\hbar^2}{4m^2|\sigma_T|^4}\right)} \\ c.c. & \rho_{--} \int e^{-\frac{(z+\frac{T}{m}\alpha)^2}{2|\sigma_T|^4}\sigma^2} \end{bmatrix} =$$

$$-\frac{1}{2|\sigma_T|^4} 2z\frac{T}{m}\alpha\left(\frac{iT\hbar}{2m}\right) = \frac{1}{2|\sigma_T|^4}\frac{iT^2\alpha\hbar z}{m^2}$$

$$2z\frac{T}{m}\alpha\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2|\sigma_T|^4}\left(\sigma^2-\frac{iT\hbar}{2m}\right) - \frac{2z\frac{T}{m}\alpha}{2\cdot 4|\sigma_T|^4}\left(\sigma^2+\frac{iT\hbar}{2m}\right)$$

$$= -\frac{izT^2\alpha\hbar}{2m^2}$$

Weźmy $T=0$ całka nie pomoże rozwiązać od $T$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}+\frac{2iz\alpha}{\hbar}} = e^{-\frac{4\alpha^2}{4\hbar^2}2\sigma^2} = e^{-\frac{2\alpha^2\sigma^2}{\hbar^2}} = e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_p^2}}$$

$$\int e^{-ax^2+bx}dx = \int e^{-a(x-\frac{b}{2a})^2+\frac{b^2}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{+\frac{b^2}{4a}}$$

$$\rho_S^{out} = \begin{bmatrix} \rho_{++} & \rho_{+-}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_p^2}} \\ \rho_{-+}\, e^{-\frac{\alpha^2}{2\sigma_p^2}} & \rho_{--} \end{bmatrix} \qquad \sigma_p^2 = \frac{\hbar^2}{4\sigma^2}$$

Tracimy koherencję w wyrazach pozadiagonalnych

Tym słabiej im bardziej rozmyte są stany wyjściowe

Schemat tego co zrobiliśmy

$$|+\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} |+\rangle|\varphi_+\rangle$$
$$|-\rangle|0\rangle \xrightarrow{U} |-\rangle|\varphi_-\rangle$$

$$\rho_S^{out} = \mathrm{Tr}_M\left(U \rho_S \otimes |0\rangle\langle 0| U^+\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}_M\Big(\rho_{++}|+\rangle\langle +|\otimes|\varphi_+\rangle\langle\varphi_+| + \rho_{--}|-\rangle\langle -|\otimes|\varphi_-\rangle\langle\varphi_-|$$
$$\rho_{+-}|+\rangle\langle -|\otimes|\varphi_+\rangle\langle\varphi_-| + \rho_{-+}|-\rangle\langle +|\otimes|\varphi_-\rangle\langle\varphi_+|\Big)$$

$$\varrho_{+-}\,|+\rangle\langle-|\otimes|\varphi_+\rangle\langle\varphi_-| + \varrho_{-+}\,|-\rangle\langle+|\otimes|\varphi_-\rangle\langle\varphi_+|\,)$$

$$= \begin{pmatrix} \varrho_{++} & \varrho_{+-}|\langle\varphi_-|\varphi_+\rangle|^2 \\ |\langle\varphi_-|\varphi_+\rangle|^2\varrho_{-+} & \varrho_{--} \end{pmatrix}$$

Im bardziej rozróżnialne stany M tym silniejsza dekoherencja

Silny pomiar => silna dekoherencja