Wyklad3

11 października 2012
18:01

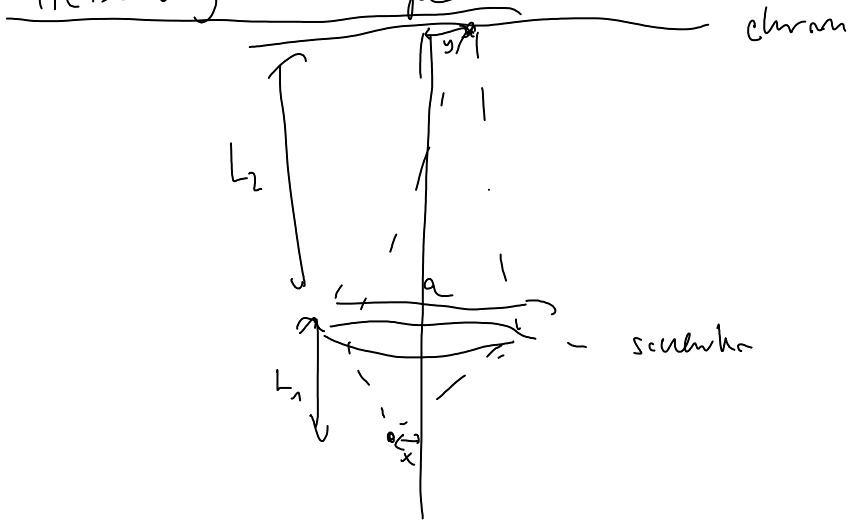
3. Zasady nieoznaczoności

...

3.1 stand. zasada nieoznaczoności a relacja precyzja vs zaburzenie:

Heisenberg chciał określić niemożliwe zaburzenie pędu związane z pomiarem położenia

Heisenberg Microscope



y możemy zmierzyć dowolnie dobrze $\frac{x}{L_1} = \frac{y}{L_2}$ $\quad x = \frac{L_1}{L_2} y$

ale to nie znaczy że x znamy dokładnie, bo mamy wiązki światła a nie promienie: Wiązka światła ogniskowana przez soczewkę o a w odległości L_1 będzie miała szerokość co najmniej $\frac{\lambda}{a}$ czyli $\delta x \approx \frac{\lambda}{a} L_1$. Nie znamy drogi którą leciał foton i jego składowa p_x będzie nieznana $\delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{a}{2L_1}$

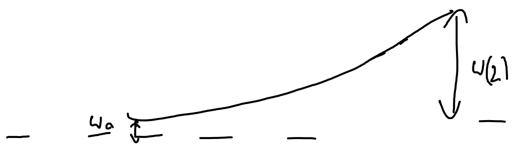
Dochodząc do wniosku:

(1) $\delta x \cdot \delta p_x \gtrsim h \;\{ \hbar, \frac{\hbar}{2}$

(1) $\epsilon(x)$ $\eta(x)$

precyzja pomiaru   disturbance

Dla wiązki Gaussowskiej:



$E \sim e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}$

$$w^2(z) = w_0^2\left(1+\frac{z^2}{z_R^2}\right) \qquad z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Jeśli $z \gg z_R$

$$w^2(z) = \frac{z^2\lambda^2}{\pi^2 w_0^2} \qquad w(z) = \frac{\lambda}{\pi w_0}\cdot z$$

niepewność

$$w_0 = \frac{2\lambda z}{\pi w(z)} \qquad \Delta p = \frac{h}{\lambda}\,\frac{\overbrace{w(z)\cdot\tfrac{1}{2}}}{2z} \qquad \Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2}$$

Niepewność $\Delta x = \frac{w_0}{2}$

Bardziej precyzyjnie: $\epsilon_x\, \eta_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}$

Na kwantach uczymy się innej zasady nieoznaczoności

Mając stan $|\psi\rangle$ definiujemy $\sigma_x = \sqrt{\langle\psi|\hat{x}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{x}|\psi\rangle^2}$

$\sigma_p = \sqrt{\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle - \langle\psi|\hat{p}|\psi\rangle^2}$

σ_x, σ_p – niepewności pędu i położenia w stanie

(2) $$\sigma_x\cdot\sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

Czy to to samo co $\epsilon_x\cdot\eta_{p_x} \geq \frac{\hbar}{2}$?

Ogólniej:

$$\sigma_A\cdot\sigma_B \geq \frac{|\langle[A,B]\rangle|}{2}$$

Zasada nieoznaczoności sformułowana przez Robertsona (1929)

nie ma mowy o „zaburzeniu" jednego przez drugi

Raczej myślimy o pomiarach $\hat{x}$ i $\hat{p}$ na osobnych egzemplarzach stanu $|\psi\rangle$.

osobnych egzemplarzach stanu $|\psi\rangle$.

Jak się mają równania (1) i (2) do siebie i czy wogóle (1) jest poprawne?

Skrót rozumowania Heisenberga:

Wykonujemy pomiar z precyzją δx, po pomiarze nasz stan ma $\sigma_x = \delta x$ czyli mamy prawo napisać

$$\delta x \cdot \sigma_p \geq \frac{\hbar}{2}$$

I jeśli utożsamimy σ_p z dp to mamy

$$\delta x \, dp \geq \frac{\hbar}{2}$$

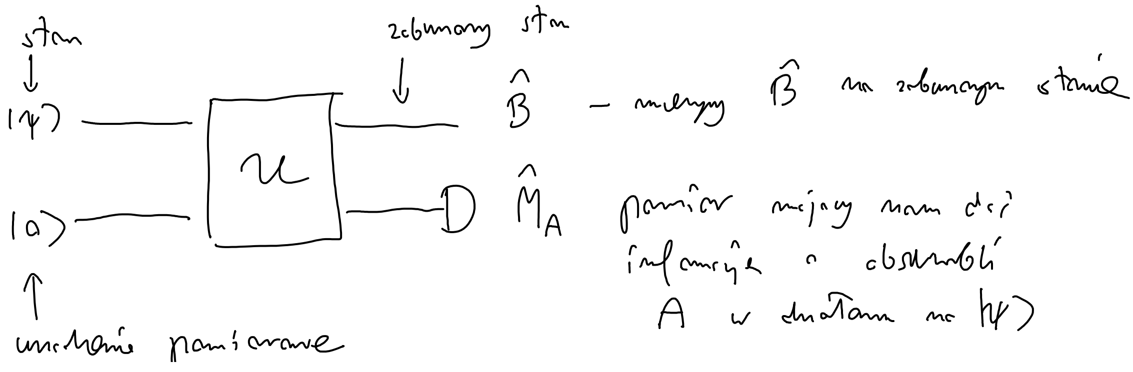
trochę mętne i w ogóle nie zdefiniowaliśmy δx, dp ...

żeby to wybronić trzeba byłoby założyć:

- $\delta x \ll \sigma_x^{\text{początkowe}} \Rightarrow \sigma_x = \delta x$
- $\sigma_p^{\text{początkowe}} \ll \sigma_p$ żeby móc powiedzieć że $dp = \sigma_p$
- A jeśli miałoby to działać dla dowolnych stanów to pod warunkiem że δx i dp są niezależne od stanu bo działa dla stanu o dobrze określonym pędzie.

3.2 Ogólna relacja precyzja vs. zaburzenie (Ozawa 200

Jak precyzja pomiaru $\hat{A}$ związana jest z zaburzeniem obserwabli $\hat{B}$?



$\uparrow$
urządzenie pomiarowe

$\hat{A}$ w stanie na $|\psi\rangle$

Precyzja

$$|\psi^{out}\rangle_{SM} = \mathcal{U}\,|\psi\rangle_S \otimes |0\rangle_M$$

Mierzymy $\mathbb{1} \otimes M_A$ na $|\psi^{out}\rangle$ i pytamy na ile
to coś innego niż pomiar $\hat{A}$ na $|\psi\rangle$
Wygodniej będzie w obrazie Heisenberga

Mierzymy:

$$M^{out} = \mathcal{U}^{\dagger}\, \mathbb{1} \otimes M_A\, \mathcal{U} \quad \text{na} \quad |\psi\rangle|0\rangle$$

i porównujemy z $A^{in} = \hat{A} \otimes \mathbb{1}$ na $|\psi\rangle|0\rangle$

$$\delta_A := \sqrt{\left\langle \left(M_A^{out} - A^{in}\right)^2 \right\rangle}$$

$\uparrow$ średnia na $|\psi\rangle|0\rangle$

$\uparrow$
opisuje ile dodaje się błędu w związku z
tym, że pomiar pośredni
Jeśli $M_A^{out} = A \otimes \mathbb{1}$, pomiar doskonały $\delta A = 0$
(zwróćmy uwagę, że wtedy $\delta A = 0$ nawet jeśli $\sigma_A \gg 0$)

Zaburzenie:

Podobnie:

$$d_B := \sqrt{\left\langle \left(B^{out} - B^{in}\right)^2 \right\rangle}$$

gdzie $B^{out} = \mathcal{U}^{\dagger} B \otimes \mathbb{1}\, \mathcal{U}$ $\quad B^{in} = B \otimes \mathbb{1}$

– jak bardzo $\mathcal{U}$ zmieniło pomiary obserwabli B

Zdefiniujmy operatory:

$N = M^{out} - A^{in}$ – op. szumu pomiaru A

$N_A = M_A^{out} - A^{in}$ – op. szumu pomiaru A

$D_B = B^{out} - B^{in}$ – op zaburzenia B

Zauważmy że $[M_A^{out}, B^{out}] = U^\dagger [1 \otimes M_A, B \otimes 1] U = 0$

$$[N_A, D_B] + [N_A, B^{in}] + [D_B, A^{in}] = -[A^{in}, B^{in}]$$

Z nierówności trójkąta:

$$(*)\quad |\langle [N_A, D_B]\rangle| + |\langle [N_A, B^{in}]\rangle + \langle [D_B, A^{in}]\rangle| \geq |\langle [A, B]\rangle|$$

$$\delta_A \cdot d_B = \sqrt{\langle N_A^2\rangle} \cdot \sqrt{\langle D_B^2\rangle} \geq \underbrace{\sigma_{N_A} \cdot \sigma_{D_B}}_{\text{pamiętajmy o tym}} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} |\langle [N_A, D_B]\rangle|$$

Podstawiając do $(*)$

$$(**)\quad \delta_A \cdot d_B + \frac{1}{2}\left(|\langle [N_A, B^{in}]\rangle + \langle [D_B, A^{in}]\rangle|\right) \geq \frac{1}{2}|\langle [A, B]\rangle|$$

$\Downarrow$ stosując

Korzystając ze standardowej nierówności Heis możemy wypisać

$$\delta_A \cdot d_B + \delta_A \cdot \sigma_B + d_B \cdot \sigma_A \geq \frac{1}{2}|\langle [A, B]\rangle|$$

Zauważmy że ta nierówność nie wyklucza sytuacji w której:

$\delta_A \cdot d_B = 0$ bo np $\delta_A = 0$ ale $d_B > 0$ skończone

pod warunkiem że $d_B \cdot \sigma_A \geq \frac{1}{2}[A, B]$

W związku z tym $\delta_A \cdot d_B \geq \frac{1}{2}[\langle A, B\rangle]$

w ogólności nie prawdziwa

w ogólności nieprawdziwa !

Nowa zasada nieoznaczoności

$$\delta_A \, d_B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$$

prawdziwa jeśli $[N_A, B^{in}] + [D_B, A^{in}] = 0$

Czyli w szczególności jeśli:

$$N_A = \mathbb{1} \otimes N \qquad D_B = \mathbb{1} \otimes D$$

Co oznacza że szum/zaburzenia

są niezależne od stanu wejściowego $|\psi\rangle$!

Przykład

Rozważmy dwie cząstki kwantowe z których utworzone są odpowiednie op. położenia i pędu:

$$q_S\ p_S,\ q_M,\ p_M \qquad [q_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$$

Chcemy zmierzyć q_S i zbadać zaburzenie p_S cząstki

$$A = q_S \qquad B = p_S$$

Rozważmy ewolucję $U = e^{-\frac{i q_S p_M}{\hbar}}$

I zapiszmy jako ewolucję operatory w obrazie Heisenberga

$$\begin{cases} q_S^{out} = U^\dagger q_S U = q_S \\ p_S^{out} = U^\dagger p_S U = e^{\frac{i q_S p_M}{\hbar}} p_S e^{-\frac{i q_S p_M}{\hbar}} = \\ \qquad = p_S - p_M \qquad \left\{ e^{B} A e^{-B} = A + [B,A] + \frac{1}{2}[B,[B, \right. \\ q_M^{out} = U^\dagger q_M U = q_M + q_S \\ p_M^{out} = p_M \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_s^{out} = U^\dagger q_s U = q_s \\ p_s^{out} = U^\dagger p_s U = e^{\frac{i q_s p_M}{\hbar}} \, p_s \, e^{-\frac{i q_s p_M}{\hbar}} = \\ \qquad = p_s - p_M \qquad \left\{ e^{B} A e^{-B} = A + [B,A] + \tfrac{1}{2}[B,[B, \right. \\ q_M^{out} = U^\dagger q_M U = q_M + q_s \\ p_M^{out} = p_M \end{cases}$$

Mierzymy na cząstce M położenie $\hat{M}_A = q_M$

Czyli: $M^{out} = q_M^{out} = q_M + q_s \qquad N_A = q_M$

$$B^{out} = p_s^{out} = p_s - p_M \qquad D_B = -p_M$$

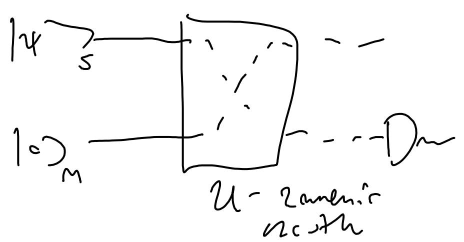
Widzimy, że $[N_A, B^{in}] = [q_M, p_s] = 0$

$$[D_B, A^{in}] = [-p_M, q_s] = 0$$

Czyli $\delta_A \cdot d_B \geq \frac{1}{2} |\langle [q_s, p_s] \rangle| = \frac{\hbar}{2}$

„Naiwna" zasada nieoznaczoności spełniona bo szum/zaburzenie nie zależały od $|\psi\rangle_s$

Przykład (trywialny)



$A = q_s$
$B = p_s$
$M_A = q_M$

$$\begin{cases} q_M^{out} = q_s \qquad q_s^{out} = q_M \\ p_M^{out} = p_s \qquad p_s^{out} = p_M \end{cases}$$

$$N_A = q_s - q_s = 0 \qquad D_B = p_M - p_s$$

$$\Downarrow \qquad\qquad [D_B, A^{in}] \neq 0$$

$$\delta_A = 0 \qquad d_B = \sqrt{\langle (p_M - p_s)^2 \rangle}$$

precyzyjny pomiar

Widzimy że $\delta_A \cdot d_B = 0$ skończone zaburzenie pędu przy dokładnym pomiarze położenia