

Powtórka $z = a + ib, \bar{z} = a - ib, (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$ (to pozwala usuwać zespoloność z mianownika), $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

Zadanie 1 Sprawdzić, że: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$
Rozwiązać równanie liniowe

$$(2 + 5i)(z - 1 - 2i) = 9 + 8i.$$

Wynik zapisać w postaci $a + ib$. odp: $3 + i$.

Zadanie 2 Przedstawić w postaci $a + ib$ następujące liczby zespolone:

$$(3 + 4i)(2 - i) + (-5 - 7i)(-2 - 3i), \quad \frac{2 - i}{3 + 4i}, \quad \frac{(1 + 3i)(8 - i)}{(2 + i)^2}$$

odp: $-1 + 34i, 2/25 - 11/25i, 5 + i$

Zadanie 3 Rozwiązać układ równań w \mathbb{C} :

$$(3 - i)z_1 + (1 + 2i)z_2 = 4 + 3i \quad (1)$$

$$(1 - i)z_1 - (2 - i)z_2 = -7 - 4i \quad (2)$$

odp: $z_1 = 2 - i, z_2 = 3 + 2i$.

Zadanie 4 Wyznaczyć liczby rzeczywiste x, y spełniające równanie:

$$\frac{1 + yi}{x - 2i} = 3i - 1$$

odp: $x = 5, y = 17$

Zadanie 5 Rozwiązać równanie kwadratowe w \mathbb{C} . Zapisać trójmian w postaci iloczynowej, wymnożyć i sprawdzić że się zgadza:

$$2z^2 - 2z + 5 = 0$$

odp: $1/2 \pm (3i)/2$

Zadanie 6 Rozwiązać równanie kwadratowe:

$$z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$$

Zapisać trójmian w postaci iloczynowej, wymnożyć i sprawdzić że się zgadza odp: $3i, 1 - 2i$

Zadanie 7 Znaleźć wszystkie liczby z spełniające:

$$(a) z^2 = i \quad (b) z^2 = 3 + 4i$$

odp: (a) $\pm(1 + i)/\sqrt{2}$, (b) $\pm(2 + i)$

Zadanie 8 Definiujemy odległość $d(z_1, z_2) := |z_2 - z_1|$. Przekonać się, że jeżeli $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, to $d(z_1, z_2)$ zgadza się ze znaną ze szkoły definicją odległości na płaszczyźnie pomiędzy punktami o współrzędnych $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$(a) |z - 2 + 3i| = 4 \quad (b) |z - 2 - i| + |z + 2 - i| = 6 \quad (c) \operatorname{Re}(z) + 1 \geq 2\operatorname{Im}(z)$$