Rząd macierzy, redukcja wierszowa i kolumnowa

Definicja 1 *Niech $A \in \mathbb{K}^m_n$ będzie macierzą o n kolumnach $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}^m$. Określamy następujące operacje (na układzie wektorów lub na kolumnach macierzy) nazywane* ***operacjami elementarnymi****:*

I. Przestawienie:

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}), \qquad \sigma \in S_n$$

II. Pomnożenie któregoś wektora przez niezerową liczbę:

$$(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \mapsto (a_1, \ldots, \lambda a_i, \ldots, a_n), \qquad 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$$

III. Dodanie krotności jednego z wektorów do pozostałych wektorów:

$$(a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \mapsto (a_1 + \lambda_1 a_i, \ldots, a_i, \ldots, a_n + \lambda_n a_i), \qquad \lambda_j \in \mathbb{K}\ (j \neq i)$$

Analogicznie do operacji elementarnych na kolumnach macierzy definiujemy operacje elementarne na wierszach macierzy.

Operacje elementarne na kolumnach nie zmieniają $\operatorname{im} A$*, natomiast operacje elementarne na wierszach nie zmieniają* $\ker A$.

Zadanie 1 Znaleźć wymiary i wyznaczyć bazy przestrzeni rozwiązań podanych układów równań liniowych jednorodnych:

$$\text{(a)} \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ x + 3y - 4z + t = 0 \\ 2x - y + z + 3t = 0 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y + z - s + 6t = 0 \\ 3x + 8y + 5z + 3s + 10t = 0 \\ 5x + 12y + 7z + s + 22t = 0 \end{cases},$$

Zadanie 2 Wyznaczyć zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych niejednorodnych:

$$\text{(a)} \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z - 2t = 1 \\ 2x + y - z + t = 3 \end{cases}, \quad \text{(b)} \begin{cases} x + 2y - z + s - 2t = 1 \\ 4x + 5y + z + t = 4 \\ 6x + 9y - z + 2s - 3t = 6 \end{cases},$$

Zadanie 3 Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy wyznaczyć macierze odwrotne:

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

Zadanie 4 Znaleźć $U + V$ i $U \cap V$ gdzie:

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Zadanie 5 Niech

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 38 & \\ -3 & -5 & -2 & -5 \\ -1 & -3 & -2 & -7 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$V_0 = \ker A$, $V_1 = \operatorname{Im} A$. Znajdź (a) takie bazy podprzestrzeni V_0 i V_1 by ich wspólne wektory tworzyły bazę $V_0 \cap V_1$, (b) układ równań opisujący podprzestrzeń $V_0 + V_1$ i bazę tej podprzestrzeni.