Powtórka $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, $z = a + ib = |z|e^{i\varphi} = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\varphi = arg(z)$, $z^n = |z|^n e^{in\varphi}$, pierwiastki n-go stopnia liczby z: $z_n = \sqrt[n]{|z|}e^{i(\varphi+2k\pi)/n}$ $(k = 0, 2 \ldots, n-1)$

Zadanie 1 Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby zespolone: $-3i$, $\sqrt{3} - i$, $1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$. Ponadto zinterpretować geometrycznie zbiory:

a) $\{z \in \mathbb{C} : z = (2 - i)t, 0 \le t \le 2\}$

b) $\{z \in \mathbb{C} : |(z - 2i)/(z + 1)| < 1\}$

Zadanie 2 Obliczyć:

a) $(2\sqrt{3} - 2i)^{30}$

b) $\frac{2i^3(1-i)^{15}}{-3(-i)^5(-1+i\sqrt{3})^9}$

c) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$

(a) -4^{30}, (b) $-1/6(1 + i)$, (c) $e^{-in\pi/3}$

Zadanie 3 Wyrazić

a) $\cos 3x$ przez funkcję $\cos x$

b) ctg$5x$ przez funkcję ctg$x$

(a) $\cos x(4\cos^2 x - 3)$, (b) $\frac{\cot^5 x - 10\cot^3 x + 5\cot x}{5\cot^4 x - 10\cot^2 x + 1}$

Zadanie 4 Wykorzystując wzór na sumę szeregu geometrycznego obliczyć:

a) $1 + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx$, gdzie $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

b) $1 + \sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx$, gdzie $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$

(a) $\frac{1-\cos x - \cos(n+1)x + \cos nx}{2 - 2\cos x}$, (b) $1 + \frac{\sin x - \sin nx + \sin(n-1)x}{2-2\cos x}$

Zadanie 5 Narysować zbiór $f^{-1}(S) := \{z : f(z) \in S\}$ jeśli

a) $S = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) > 0\}, f(z) = z^3$

b) $S = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}, f(z) = \frac{2z-3i}{3z+2i}$

(a) wszystkie liczby o argumencie $-\pi/6 < \varphi < \pi/6$, (b) obszar na zewnątrz okręgu o środku w punkcie $(0, -3/2)$ i promieniu $3/2$

Zadanie 6 Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej wszystkie pierwiastki z następujących liczb:

a) $\sqrt{-2i}$

b) $\sqrt[3]{27i}$

c) $\sqrt[6]{1}$

Ponadto wykazać, że w ogólności suma wszystkich pierwiastków stopnia n z 1 jest równa zero. (a) $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}, \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$, (b) $3e^{i\pi/6}, 3e^{i5\pi/6}, 3e^{i9\pi/6}$, (c) $1, e^{i\pi/3}, e^{2i\pi/3}, -1, e^{i4\pi/3}, e^{i5\pi/3}$

Zadanie 7 Rozwiązać równania

a) $z^6 = (2 + 4i)^6$

b) $|z|\overline{z}^3 = 4z^3$

c) $z^6 = -8iz^2$

(a) $(2 + 4i)e^{i2\pi k/6}, k = 0, \ldots 5$, (b) $z = 0, z = 4e^{ik\pi/3}, k = 0, 1, 2$, (c) $z = 0, z = \sqrt[4]{8}e^{i3\pi/8 = ik\pi/2}$, k=0,1,2,3