Przestrzenie wektorowe, Liniowa niezależność

Definicja 1 ***Przestrzenią wektorową nad ciałem*** $\mathbb{K}$ *nazywamy grupę przemienną* $(V, +)$ *wyposażoną w odwzorowanie*

$$\mathbb{K} \times V \ni (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \in V,$$

takie, że dla wszystkich $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $v, w \in V$ *zachodzi:*

(i) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v), \qquad 1 \cdot v = v$

(ii) $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v, \qquad \lambda \cdot (v + w) = \lambda \cdot v + \mu \cdot w$

Elementy zbioru V *nazywamy* ***wektorami*** *a elementy ciała* $\mathbb{K}$ *-* ***skalarami****. Element neutralny (zero) w grupie* $(V, +)$ *nazywa się* ***wektorem zerowym*** *i oznacza się go przez* $\vec{0}$.

Definicja 2 ***Kombinacją liniową*** *wektorów* $v_1, \ldots, v_i \in V$ *nazywa się wektor* $v \in V$*, dający się przedstawić w postaci*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i$$

gdzie $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ *są jakimiś elementami ciała* $\mathbb{K}$*, nazywanymi współczynnikami kombinacji liniowej.*

Definicja 3 *Mówimy, że wektory* $v_1, v_2, \ldots, v_i$ *w przestrzeni wektorowej* V *są* ***liniowo niezależne****, jeśli*

$$\forall_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i \in \mathbb{K}} \ (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_i v_i = \vec{0} \ \Rightarrow \ \lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_i = 0)$$

Zadanie 1 Sprawdzić, czy przestrzenią wektorową jest

a) zbiór $V := \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wszystkich funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. gdzie w zbiorze V wprowadzamy działania $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) := \lambda f(x)$, gdzie $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) zbiór $\mathbb{R}[\,\cdot\,]$ wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$

c) zbiór $\mathbb{R}_n[\,\cdot\,]$ wielomianów stopnia nie większego niż n

d) zbiór $\mathbb{R}[\,\cdot\,]$ wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$ takich że $f(0) = 0$.

e) zbiór $\mathbb{R}[\,\cdot\,]$ wielomianów nad ciałem $\mathbb{R}$ takich że $f(0) = 1$.

Zadanie 2 Sprawdzić, czy wektor v jest kombinacją linową wektorów v_i w odpowiednich przestrzeniach wektorowych, jeśli:

a) $v = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}, v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$

b) $v(x) = x^2 - 1$, $v_1(x) = 2x^2 + x + 1$, $v_2(x) = x^2 + 2$, $v_3(x) = x - 3$ w przestrzeni $\mathbb{R}_2[x]$

Zadanie 3 Zbadać liniową niezależność podanych układów wektorów w odpowiednich przestrzeniach wektorowych:

a) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ w $\mathbb{R}^3$

b) $\{5 - x, 4 + x, 2x + 3\}$, $\{1 - x^3, 3x + 2, x^2 + x - 2\}$, w $\mathbb{R}[x]$

c) $\{(1, 0, 0, 0, \ldots), (1, 1, 0, 0, \ldots), (1, 1, 1, 0, \ldots), \ldots\}$ w $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$