Jądro, Obraz odwzorowania, Macierze

Definicja 1 *Niech $F\colon V \to W$ będzie odwzorowaniem liniowym.*

(i) Zbiór $\ker F := \{v \in V : F(v) = \vec{0}\} \subset V$ *nazywamy* ***jądrem*** F

(ii) Zbiór $\operatorname{Im} F := \{F(v) : v \in V\} \subset W$ *nazywamy* ***obrazem*** F

Definicja 2 *Jeśli $e = (e_1, \ldots, e_n)$ jest bazą w V, zaś $f = (f_1, \ldots, f_m)$ - bazą w W, to* ***macierzą odwzorowania*** $F \in L(V, W)$ *względem obu tych baz nazywamy macierz*

$$[F]^f{}_e = \begin{bmatrix} F^1{}_1 & \ldots & F^1{}_n \\ \vdots & & \vdots \\ F^m{}_1 & \ldots & F^m{}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^m{}_n,$$

której kolejne kolumny są wektorami $[F(e_1)]^f, \ldots, [F(e_n)]^f \in \mathbb{K}^m$. Oznacza to, że liczby $F^1{}_j, \ldots, F^m{}_j$ są współrzędnymi wektora $F(e_j)$ w bazie f.

Jeśli $e, \tilde{e}$ - dwie bazy w V a $f, \tilde{f}$ - dwie bazy w W, to

$$[F]^{\tilde{f}}{}_{\tilde{e}} = [id_W]^{\tilde{f}}{}_f [F]^f{}_e [id_V]^e{}_{\tilde{e}}.$$

Macierz typu $[id_V]^e{}_{\tilde{e}}$ nazywa się ***macierzą zmiany bazy*** *(macierzą przejścia z bazy $\tilde{e}$ do bazy e).*

Zadanie 1 Wyznaczyć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych:

a) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, L jest rzutem prostopadłym na oś x

b) $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, L jest obrotem wokół początku układu współrzędnych o kąt $\frac{\pi}{4}$

c) $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, L jest symetrią względem osi y

Zadanie 2 Wyznaczyć bazy jąder i bazy obrazów dla podanych odwzorowań liniowych:

$$\text{(a) } F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ F\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-y \\ x+y \end{bmatrix}, \quad \text{(b) } F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ F\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{bmatrix},$$

$$\text{(g) } F\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ (Fu)(x) = u(x) + (x-1)u(0),$$

Zadanie 3 Znaleźć przykłady przekształceń liniowych takich, że

a) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \ker F = \left\{ \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\},\ \operatorname{Im} F = \left\{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} : 2r = -s,\ 3s = 2t \right\}$

b) $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ \ker F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle,\ \operatorname{Im} F = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$

c) $F\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x],\ \ker F = \langle x+1, x^2+1 \rangle,\ \operatorname{Im} F = \langle x^2 \rangle$

Czy F jest wyznaczone jednoznacznie?

Zadanie 4 Wykonać mnożenia macierzy $AC, AB, BA, BC, BC + D, A + B, A^2, B^2$. Uzasadnić dlaczego dane działanie jest, bądź nie jest wykonalne, jeśli:

$$\text{(a)} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5 Rozwiązać podane równania macierzowe:

$$\text{(a)} \quad 3\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -i & 0 \end{bmatrix} + X\right) + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ i & 4 \end{bmatrix} = X$$

Zadanie 6 Napisać macierze podanych odwzorowań liniowych w bazach standardowych odpowiednich przestrzeni wektorowych:

$$\text{(a) } T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ 3x-6y \\ 4x-y \end{bmatrix} \quad \text{(b) } T\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2,\ T\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5x-y+2z \\ -4x+3z-t \end{bmatrix}$$

Zadanie 7 Wyznaczyć macierz operatora $F\colon V \to V$, gdzie $V = \mathbb{R}_3[x]$, w bazie jednomianów $e_0(x) = 1$, $e_1(x) = x$, $e_2(x) = x^2$, $e_3(x) = x^3$, jeśli

$$\text{(a) } (Fv)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v(x), \quad \text{(b) } (Fv)(x) = xv'(x) + 2v(x), \quad \text{(c) } (Fv)(x) = (x-1)v(-2) + x^2v''(x).$$