Rząd macierzy, redukcja wierszowa i kolumnowa

Definicja 1 ***Rzędem*** *macierzy A nazywamy liczbę* $\operatorname{rank}(A) := \dim(\operatorname{im} A)$.

Definicja 2 *Niech $A \in \mathbb{K}^m_n$ będzie macierzą o n kolumnach $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}^m$. Określamy następujące operacje (na układzie wektorów lub na kolumnach macierzy) nazywane* ***operacjami elementarnymi****:*

I. Przestawienie:
$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(n)}), \qquad \sigma \in S_n$$

II. Pomnożenie któregoś wektora przez niezerową liczbę:
$$(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \mapsto (a_1, \dots, \lambda a_i, \dots, a_n), \qquad 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$$

III. Dodanie krotności jednego z wektorów do pozostałych wektorów:
$$(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) \mapsto (a_1 + \lambda_1 a_i, \dots, a_i, \dots, a_n + \lambda_n a_i), \qquad \lambda_j \in \mathbb{K}\ (j \neq i)$$

Analogicznie do operacji elementarnych na kolumnach macierzy definiujemy operacje elementarne na wierszach macierzy.

Operacje elementarne na kolumnach nie zmieniają $\operatorname{im} A$*, natomiast operacje elementarne na wierszach nie zmieniają* $\ker A$.

Twierdzenie 3 *Dla dowolnej macierzy A zachodzi* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A^T)$.

Zadanie 1 Znaleźć macierze podanych odwzorowań liniowych we wskazanych bazach odpowiednich przestrzeni wektorowych:

a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\quad T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} x+y \\ 2x+y \\ x-3y \end{smallmatrix}\right]$; $\quad \tilde{e} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]\right)$, $\tilde{f} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]\right)$;

b) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\quad T\left[\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2x-y \\ -3y-z \end{smallmatrix}\right]$; $\quad \tilde{e} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right]\right)$, $\tilde{f} = \left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]\right)$;

Zadanie 2 Znaleźć rzędy podanych macierzy, wskazać jakąkolwiek bazę obrazu i jądra:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

Zadanie 3 Przeprowadzając odpowiednio redukcję kolumnową lub wierszową macierzy sprawdzić, że:

a) $\operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $\operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 5 & -4 \end{bmatrix} = \operatorname{Im}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$,

c) $\ker\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \ker\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

Zadanie 4 Określić wymiary i wyznaczyć bazy podprzestrzeni wektorowych generowanych przez podane wektory ze wskazanych przestrzeni wektorowych:

$$\text{(a)} \ \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle, \ \mathbb{R}^3; \quad \text{(b)} \ \left\langle \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle, \ \mathbb{R}^4$$

Zadanie 5 Wykonując operacje elementarne na wierszach lub kolumnach podanych macierzy wyznaczyć macierze odwrotne:

$$\text{(a)} \ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{(b)} \ \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

Zadanie 6 Znaleźć wymiary i wyznaczyć bazy przestrzeni rozwiązań podanych układów równań liniowych jednorodnych:

$$\text{(a)} \ \begin{cases} x - y + 2z - t = 0 \\ x + 3y - 4z + t = 0 \\ 2x - y + z + 3t = 0 \end{cases}, \quad \text{(b)} \ \begin{cases} x + 2y + z - s + 6t = 0 \\ 3x + 8y + 5z + 3s + 10t = 0 \\ 5x + 12y + 7z + s + 22t = 0 \end{cases},$$

Zadanie 7 Wyznaczyć zbiory rozwiązań podanych układów równań liniowych niejednorodnych:

$$\text{(a)} \ \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + y + z - 2t = 1 \\ 2x + y - z + t = 3 \end{cases}, \quad \text{(b)} \ \begin{cases} x + 2y - z + s - 2t = 1 \\ 4x + 5y + z + t = 4 \\ 6x + 9y - z + 2s - 3t = 6 \end{cases},$$