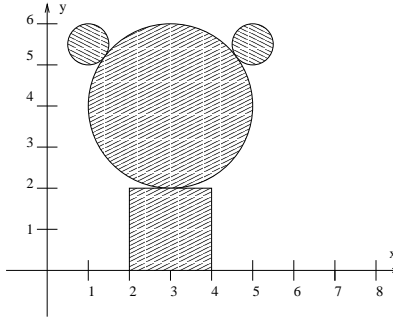


## Seria 5

do zrobienia przed kolokwium

**Zadanie 1** Zakładając, że dwuwymiarowy stworek przedstawiony na rysunku jest cały zrobiony z materiału o tej samej gęstości, znajdź jego środek masy (tzn. napisz wektor położenia środka masy).



**Zadanie 2** Na nitce o długości  $l$  wisi punktowa masa o masie  $m$  (wahadło matematyczne). Ktoś kopnął masę nadając jej początkową poziomą prędkość  $v_0 = 2\sqrt{gl}$  w lewo. Wahadło zacznie się wyhyłać w lewo i jak może sprawdzić bystry student jego wychylenie na pewno przekroczy kąt  $\alpha = 90^\circ$ . Kąt się będzie dalej zwiększał, aż w pewnym momencie nitka na której wisi wahadło zwiotczeje. Dla jakiego kąta  $\alpha$  się to stanie? Jak będzie poruszać się ciało od momentu jak nitka zwiotczeje?

**Zadanie 3** Pewne ciało (zgodnie z obietnicą może to być gumis), porusza się w potencjale  $V(x) = x^3 - x^2 - x$ . Znajdź położenia równowagi ciała i stwierdź czy są to położenia równowagi trwałej czy chwiejnej. Załóżmy teraz, że ciało znajduje się, w spoczynku, w położeniu równowagi trwałej tego potencjału. Ile energii trzeba dostarczyć ciału, żeby opuściło ten "dołek"?

**Zadanie 4 (dodatkowe)** Ścisłe równanie różniczkowe opisujące ruch wahadła matematycznego ma postać:  $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin(\alpha)$ , gdzie  $\alpha(t)$  oznacza kąt wychylenia wahadła z położenia równowagi w chwili  $t$ . Zazwyczaj robimy przybliżenie małych drgań i piszemy  $\sin(\alpha) \approx \alpha$ . Wtedy dostajemy równanie oscylatora harmonicznego, okres drgań wynosi  $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ , czyli nie zależy od amplitudy drgań (pod warunkiem że amplituda jest mała). Nie robiąc przybliżenia małych drgań, stosując metodę Eulera rozwiąż numerycznie powyższe równanie różniczkowe (przyjmując np.  $l = 1m$ ,  $g = 10m/s^2$ ). Przeprowadź symulacje dla różnych początkowych wychyleń wahadła:  $5^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ , i stwierdź jaki jest okres drgań. Kontroluj dokładność obliczeń patrząc czy suma energii kinetycznej i potencjalnej jest stała. Czy teraz okres drgań zależy od amplitudy? Jak bardzo różnią się okresy drgań dla dużych wychyleń od okresu drgań wahadła który dostaliśmy przy założeniu małych drgań? Program rozwiązujący numerycznie równanie różniczkowe można napisać w dowolnym ulubionym przez was języku programowania np. C++, Pascal, Fortran .... Jeśli ktoś nie jest biegły w programowaniu, to można ten problem zbadać przy użyciu jakiegoś programu matematycznego np. Mathematica, a nawet przy użyciu Excela.

**Życzymy powodzenia!**

Kazimierz Rzażewski  
Rafał Demkowicz-Dobrzański<sup>1</sup>

<sup>1</sup>zadania są dostępne pod adresem: [www.cft.edu.pl/~demko/zadania.html](http://www.cft.edu.pl/~demko/zadania.html)