

Zadania domowe z Informatyki kwantowej

Seria 2

26 X 2005

Zadanie 1 Przyjrzyj się macierzom:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Które z powyższych macierzy są unitarne? Które z powyższych macierzy są hermitowskie. Znajdź wektory własne i wartości własne wszystkich macierzy hermitowskich.

Zadanie 2 Stany polaryzacyjne fotonu o liniowej polaryzacji poziomej i pionowej oznaczone są odpowiednio przez:

$$|\leftrightarrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad |\updownarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Fotony są przepuszczone przez urządzenie, które zmienia ich stan polaryzacyjny. Działanie urządzenia opisuje unitarna macierz:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

W jakim stanie powinny znajdować się fotony wpuszczone do tego urządzenia aby ich stan nie zmienił się (stan układu uznajemy za taki sam również wtedy jeśli wektor wyjściowy różni się od wejściowego o czynniki $e^{i\phi}$). Jakiej polaryzacji fotonu odpowiadają te stany? Jaką macierzą opisał(a)byś operację która jest dokonywana przez dwa takie urządzenia ustawione jedno po drugim?

Zadanie 3 Do urządzenia z zadania drugiego wpuszczono foton o stanie polaryzacyjnym:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} |\leftrightarrow\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}} |\updownarrow\rangle = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Po przejściu fotonu przez urządzenie dokonano pomiaru polaryzacji fotonu w bazie:

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad |e_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Jakie jest prawdopodobieństwo zmierzenia $|e_1\rangle$, a jakie jest prawdopodobieństwo zmierzenia $|e_2\rangle$.

Powodzenia!

Marek Kuś
Rafał Demkowicz-Dobrzański¹

¹zadania są dostępne pod adresem: www.cft.edu.pl/~demko/zadania.html

Odpowiedzi

1. Unitarne: A , Hermitowskie: B, C .

Wartości własne i wektory własne macierzy B : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, |v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Wartości własne i wektory własne macierzy C : $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, |v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. $|v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$. Są to fotony o polaryzacji kołowej, prawo lub lewoskrętnej.

$$U^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. $p_1 = \frac{1}{6}(3 - 2\sqrt{2}), p_2 = \frac{1}{6}(3 + 2\sqrt{2})$