Komunikacja i Kryptografia Kwantowa

Seria 6

Odpowiedzi

Zadanie 1 (10 pkt) Niech macierz gęstości ρ_{AB} opisująca stan dwóch qubitów, zapisana w bazie $|0\rangle \otimes |0\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle$, $|1\rangle \otimes |1\rangle$ wygląda następująco:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Znajdź zredukowane macierze gęstości ρ_A, ρ_B. Podczas obliczeń zastanów się nad ogólnym praktycznym i szybkim przepisem na liczenie zredukowanych macierzy gęstości.

Odpowiedzi

$$\rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \rho_A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{2}$$

Zadanie 2 (15 pkt) Jedną z najpopularniejszych realizacji fizycznych qubitu jest polaryzacja fotonu. Ogólny stan polaryzacyjny fotonu możemy zapisać jako:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\leftrightarrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|\updownarrow\rangle \tag{3}$$

gdzie kąty θ, ϕ odpowiadają współrzędnym sferycznym na sferze Blocha.

a) Zaznacz na sferze Blocha stany o polaryzacji: poziomej, pionowej, pod kątem 45° do poziomu, pod kątem 135° do poziomu, polaryzacji kołowej lewo oraz prawo skrętnej (Uwaga! Zwróć uwagę, że pion i poziom polaryzacji nie odpowiadają pionowi i poziomowi na sferze Blocha).

b) Jakiemu przekształceniu sfery Blocha odpowiada przepuszczenie fotonu przez półfalówkę opóźniającą o fazę π polaryzację pionową względem poziomej

c) Jakiemu przekształceniu sfery Blocha odpowiada przepuszczeni fotonu przez półfalówkę z poprzedniego zadania, która została obrócona zgodnie z wskazówkami zegara o 45°

Odpowiedzi

a)

b) Obrót wokół osi z o kąt π

c) Obrót wokół osi x o kąt π

Zadanie 3 (25 pkt)

a) Zapisz za pomocą operatorów Krausa odwzorowanie prowadzące do skurczenia się kuli Blocha do kuli o promieniu $r < 1$, bez zmiany położenia środka

b) Podaj pełną operację unitarną na przestrzeni rozszerzonej o stopnie swobody otoczenia, oraz stan początkowy otoczenia które efektywnie prowadzi do transformacji qubitu z poprzedniego punktu

Odpowiedzi

a) $K_0 = \sqrt{r}\mathbb{1}$, $K_1 = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}|0\rangle\langle 0|$, $K_2 = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}|0\rangle\langle 1|$, $K_3 = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}|1\rangle\langle 0|$ $K_4 = \sqrt{\frac{1-\eta}{2}}|1\rangle\langle 1|$

b) Ponieważ mamy 5 operatorów Krausa przestrzeń qubit+otoczenie będzie $2 \times 5 = 10$ wymiarowa. Przyjmijmy, że otoczenie znajduje się początkowo w stanie $|0\rangle$. Przykładowa unitarna macierz ma postać:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{r} & \sqrt{1-r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{r} & \sqrt{1-r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{1-r}}{\sqrt{2}} & -\frac{\sqrt{r}}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

przy czym jedynie kolumny 1 i 6 są wyznaczone jednoznacznie na podstawie operatorów Krausa, pozostałe kolumny są dodane aby całość stanowiła macierz unitarną.

Zadanie 4 (25 pkt)

a) Udowodnij, że jeśli zredukowana macierz gęstości ρ_A stanu czystego $|\psi_{AB}\rangle$ jest stanem mieszanym, to stan $|\psi_{AB}\rangle$ jest splątany.

b) Udowodnij, że dla stanu czystego $|\psi_{AB}\rangle$, zredukowane macierze gęstości ρ_A i ρ_B mają te same wartości własne

Odpowiedzi

a)

b) Wskazówka: $|\psi\rangle = \sum_{i,j} c_{i,j}|i\rangle \otimes |j\rangle$, skorzystaj z singular value decomposition macierzy $c_{i,j}$

Zadanie 5 (25 pkt) Niech $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ będzie zupełnie nieznanym stanem kwantowym (w ogólności mieszanym), gdzie $\dim \mathcal{H} = d$.

a) Ile parametrów rzeczywistych jest koniecznych do opisu ρ.

b) Próbując stwierdzić z jakim stanem mamy do czynienia można wykonać pomiar. Załóżmy, że wykonujemy pewien pomiar von Neumanna, powtarzając go wielokrotnie (można przyjąć, że nieskończenie wiele razy) w celu zebrania wystarczającej statystyki. Czy wyniki takiego pomiaru wyznaczają jednoznacznie ρ? Jeśli nie (czyli nie :-)) ile różnych pomiarów von Neumanna trzeba by co najmniej wykonać, żeby móc jednoznacznie wyznaczyć ρ

c) Podaj przykład takich pomiarów von Neumanna które w sumie wystarczyłyby to jednoznacznego wyznaczenia ρ

d) Podaj przykład jednego pomiaru uogólnionego, który wystarczałby to jednoznacznego wyznaczenia ρ (oczywiście przy założeniu, że powtarzamy go nieskończenie wiele razy w celu zebrania odpowiedniej statystyki)

Odpowiedzi

a) $d^2 - 1$

b) Każdy pomiar daje $d-1$ parametrów, czyli potrzebujemy $d+1$ różnych pomiarów. Przez „różne” rozumiemy pomiary dla których prawdopodobieństwa zdarzeń będę liniowo niezależnymi kombinacjami parametrów macierzy gęstości.

c) Niech $|i\rangle$, $i = 0 \dots d-1$, będzie bazą w przestrzeni $\mathcal{H}$. Przykładowy zestaw różnych baz pomiarowych które pozwalają na wyznaczenie ρ jest następujący (to tylko jedna z propozycji). Wykonujemy pomiar w bazie $|i\rangle$. To nam zapewnia wyznaczenie diagonalnych elementów macierzy. Teraz chcemy wyznaczyć wyrazy pozadiagonalne. Zauważ, że wyraz pozadiagonalny $\rho_{i,j}$ możemy wyznaczyć jeśli w bazie pomiarowej znajdują się dwa wektory $(|i\rangle \pm |j\rangle)/\sqrt{2}$. W takim razie zapisujemy sobie wszystkie wektory postaci $(|i\rangle \pm |j\rangle)/\sqrt{2}$ dla $i < j$, jest ich $d(d-1)/2 \cdot 2 = d(d-1)$ (mamy $d(d-1)/2$ par indeksów i, j i dla każdej pary dwa wektory $\pm$). Wybieramy sobie podzbiory złożone z $(d-1)$ ortogonalnych wektorów (będzie w takim razie d podzbiorów). Każdy podzbiór uzupełniamy dodatkowym wektorem tak aby całość stanowiła bazę (ten dodatkowy wektor nie wnosi już żadnej informacji bo wiemy, że suma prawdopodobieństw dla każdej z baz zawsze sumuje się do tego samego — dla macierzy gęstości do 1). Mamy więc $d+1$ baz czyli tyle o ile chodziło (mam nadzieję, że ta konstrukcja ma sens i da się zrobić. . . .)

d) Bierzemy bazy z poprzedniego punktu i zapisujemy jeden zestaw operatorów pomiarowych $M_{j,k} = \frac{1}{d+1}|j,k\rangle\langle j,k|$, gdzie $ketj, k$ jest k-tym wektorem z bazy j-tej ($k = 1 \dots d$, $j = 1 \dots d+1$). Łatwo sprawdzić, że $\sum_{j,k} M_{j,k} = \mathbb{1}$.