

# Komunikacja i Kryptografia Kwantowa

## Seria 6

do oddania na 23.11.2010 (100 pkt do podziału)

**Zadanie 1 (10 pkt)** Niech macierz gęstości  $\rho_{AB}$  opisująca stan dwóch qubitów, zapisana w bazie  $|0\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|0\rangle \otimes |1\rangle$ ,  $|1\rangle \otimes |0\rangle$ ,  $|1\rangle \otimes |1\rangle$  wygląda następująco:

$$\rho_{AB} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{12} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Znajdź zredukowane macierze gęstości  $\rho_A$ ,  $\rho_B$ . Podczas obliczeń zastanów się nad ogólnym praktycznym i szybkim przepisem na liczenie zredukowanych macierzy gęstości.

**Zadanie 2 (15 pkt)** Jedną z najpopularniejszych realizacji fizycznych qubitów jest polaryzacja fotonu. Ogólny stan polaryzacyjny fotonu możemy zapisać jako:

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)|\leftrightarrow\rangle + \sin(\theta/2)e^{i\phi}|\downarrow\rangle \quad (2)$$

gdzie kąty  $\theta$ ,  $\phi$  odpowiadają współrzędnym sferycznym na sferze Blocha.

- Zaznacz na sferze Blocha stany o polaryzacji: poziomej, pionowej, pod kątem  $45^\circ$  do poziomu, pod kątem  $135^\circ$  do poziomu, polaryzacji kołowej lewo oraz prawo skrętnej (Uwaga! Zwróć uwagę, że pion i poziom polaryzacji nie odpowiadają pionowi i poziomowi na sferze Blocha).
- Jakiemu przekształceniu sfery Blocha odpowiada przepuszczenie fotonu przez półfalówkę opóźniającą o fazę  $\pi$  polaryzację pionową względem poziomej
- Jakiemu przekształceniu sfery Blocha odpowiada przepuszczenie fotonu przez półfalówkę z poprzedniego zadania, która została obrócona zgodnie z wskazówkami zegara o  $45^\circ$

**Zadanie 3 (25 pkt)**

- Zapisz za pomocą operatorów Krausa odwzorowanie prowadzące do skurczenia się kuli Blocha do kuli o promieniu  $r < 1$ , bez zmiany położenia środka
- Podaj pełną operację unitarną na przestrzeni rozszerzonej o stopnie swobody otoczenia, oraz stan początkowy otoczenia które efektywnie prowadzi do transformacji qubitów z poprzedniego punktu

**Zadanie 4 (25 pkt)**

- Udowodnij, że jeśli zredukowana macierz gęstości  $\rho_A$  stanu czystego  $|\psi_{AB}\rangle$  jest stanem mieszanym, to stan  $|\psi_{AB}\rangle$  jest splątany.
- Udowodnij, że dla stanu czystego  $|\psi_{AB}\rangle$ , zredukowane macierze gęstości  $\rho_A$  i  $\rho_B$  mają te same wartości własne

**Zadanie 5 (25 pkt)** Niech  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  będzie zupełnie nieznanym stanem kwantowym (w ogólności mieszanym), gdzie  $\dim \mathcal{H} = d$ .

- a) Ile parametrów rzeczywistych jest koniecznych do opisu  $\rho$ .
- b) Próbując stwierdzić z jakim stanem mamy do czynienia można wykonać pomiar. Załóżmy, że wykonujemy pewien pomiar von Neumanna, powtarzając go wielokrotnie (można przyjąć, że nieskończenie wiele razy) w celu zebrania wystarczającej statystyki. Czy wyniki takiego pomiaru wyznaczają jednoznacznie  $\rho$ ? Jeśli nie (czyli nie :-)) ile różnych pomiarów von Neumanna trzeba by co najmniej wykonać, żeby móc jednoznacznie wyznaczyć  $\rho$
- c) Podaj przykład takich pomiarów von Neumanna które w sumie wystarczyłyby to jednoznacznego wyznaczenia  $\rho$
- d) Podaj przykład jednego pomiaru uogólnionego, który wystarczałby to jednoznacznego wyznaczenia  $\rho$  (oczywiście przy założeniu, że powtarzamy go nieskończenie wiele razy w celu zebrania odpowiedniej statystyki)