Informacja Kwantowa 1/2

Seria 12

do oddania na 25.05.2012

Rozważmy układ fizyczny o d rozróżnialnych stanach opisany w ogólności macierzą gęstości

$$\hat{\sigma} = \sum_{i,j=0}^{d-1} \sigma_{ij} |i\rangle\langle j|,$$

gdzie wektory $|i\rangle$ tworzą bazę ortonormalną, zaś $\sigma_{ij} = \langle i|\hat{\sigma}|j\rangle$. Ogólne odwzorowanie liniowe Λ stanu $\hat{\sigma}$ można zapisać jako

$$\Lambda(\hat{\sigma}) = \sum_{i',j'=0}^{d-1} \sigma_{i'j'} \Lambda\big(|i'\rangle\langle j'|\big) = \sum_{i,i',j,j'=0}^{d-1} \sigma_{i'j'} \Lambda_{ii',jj'} |i\rangle\langle j|,$$

gdzie $\Lambda_{ii',jj'} = \langle i|\Lambda\big(|i'\rangle\langle j'|\big)|j\rangle$. Druga postać wynika automatycznie z „obłożenia” powyższego wyrażenia operatorami identycznościowymi $\sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle\langle i|$ oraz $\sum_{j=0}^{d-1} |j\rangle\langle j|$.

Zdefiniujmy maksymalnie splątany stan dwóch układów d-wymiarowych:

$$|\Phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle \otimes |i\rangle.$$

a) Pokazać, że $\Lambda_{ii',jj'}$ można traktować, z dokładnością do czynnika $1/d$, jako elementy macierzowe operatora gęstości

$$\hat{\varrho}^{(\Lambda)} = \big(\Lambda \otimes I\big)\big(|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|\big) = \frac{1}{d} \sum_{i,i',j,j'=0}^{d-1} \Lambda_{ii',jj'} |ii'\rangle\langle jj'|$$

b) Pokazać, że wynik działania Λ na macierz $\hat{\sigma}$ można przedstawić formalnie jako

$$\Lambda(\hat{\sigma}) = d^2 {}_{BC}\langle\Phi_+|\big(\hat{\varrho}_{AB}^{(\Lambda)} \otimes \hat{\sigma}\big)|\Phi_+\rangle_{BC}. \tag{1}$$

Po prawej stronie operator $\hat{\varrho}_{AB}^{(\Lambda)}$ opisuje układy AB, zaś $\hat{\sigma}$ jest traktowany jako opisujący układ C. Częściowy rzut jest dokonywany na stan $|\Phi_+\rangle$ układów BC. W konsekwencji końcowe wyrażenie jest operatorem działającym na układ A. Powyższa tożsamość jest znana jako *izomorfirm Choi-Jamiołkowskiego* pomiędzy odwzorowaniami układów d-wymiarowych a operatorami układów $d \otimes d$.

c) Jeśli Λ jest całkowicie dodatnie, macierz $\hat{\varrho}^{(\Lambda)}$ można rozłożyć na wartości i wektory własne

$$\hat{\varrho}^{(\Lambda)} = \sum_{\mu=0}^{d-1} w_\mu |\xi^{(\mu)}\rangle\langle\xi^{(\mu)}|, \qquad |\xi^{(\mu)}\rangle = \sum_{i,j=0}^{d-1} \xi_{ij}^{(\mu)} |ij\rangle, \qquad w_\mu \geq 0, \qquad \sum_{\mu=0}^{d-1} w_\mu = 1. \tag{2}$$

Pokazać, że po wstawieniu powyższego wyrażenia do równania (1) pojedynczy składnik sumy po μ można przedstawić jako

$$w_\mu d^2 {}_{BC}\langle\Phi_+|\big(|\xi^{(\mu)}\rangle_{AB}\langle\xi^{(\mu)}| \otimes \hat{\sigma}\big)|\Phi_+\rangle_{BC} = \hat{K}^{(\mu)} \hat{\sigma} (\hat{K}^{(\mu)})^\dagger$$

i znaleźć jawną postać współczynników $K_{ij}^{(\mu)}$ w reprezentacji macierzowej $\hat{K}^{(\mu)} = \sum_{i,j=0}^{d-1} K_{ij}^{(\mu)} |i\rangle\langle j|$. Powyższy wynik oznacza, że dowolne odwzorowanie całkowicie dodatnie działające na układ d-wymiarowy można zrealizować przy użyciu co najwyżej d^2 operatorów Krausa.