Informacja Kwantowa 1/2

Seria 4

do oddania na 16.03.2012

a) Pokazać, że w przedstawieniu dowolnego operator qubitowego w postaci sumy

$$\hat{A} = a_0 \hat{\mathbb{1}} + a_1 \hat{\sigma}_1 + a_2 \hat{\sigma}_2 + a_3 \hat{\sigma}_3$$

współczynniki rozwinięcia są dane przez $a_0 = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{A})$ oraz $a_k = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\hat{A}\hat{\sigma}_k)$, $k = 1, 2, 3$.

b) Znaleźć macierzową postać operatora $\hat{U} = \exp(i\alpha \mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}/2)$, gdzie $\mathbf{n}$ jest wektorem jednostkowym. *Wskazówka:* wygodnie jest skorzystać z postaci $\hat{U} = e^{i\alpha/2}|\mathbf{n}\rangle\langle\mathbf{n}| + e^{-i\alpha/2}|-\mathbf{n}\rangle\langle-\mathbf{n}|$, gdzie $|\pm\mathbf{n}\rangle$ są wektorami własnymi $\mathbf{n} \cdot \hat{\boldsymbol{\sigma}}$ odpowiadającymi wartościom własnym ± 1.

c) Znaleźć jawną postać rzeczywistej macierzy $\mathbf{O}$ w transformacji

$$\begin{pmatrix} \hat{U}^\dagger \hat{\sigma}_1 \hat{U} \\ \hat{U}^\dagger \hat{\sigma}_2 \hat{U} \\ \hat{U}^\dagger \hat{\sigma}_3 \hat{U} \end{pmatrix} = \mathbf{O} \begin{pmatrix} \hat{\sigma}_1 \\ \hat{\sigma}_2 \\ \hat{\sigma}_2 \end{pmatrix}$$

Sprawdzić, że macierz $\mathbf{O}$ jest macierzą obrotu właściwego (co jest równoważne warunkom $\det\mathbf{O} = 1$ oraz $\mathbf{O}^T\mathbf{O} = \mathbf{I}$) wokół osi zdefiniowanej przez wektor $\mathbf{n}$ (czyli $\mathbf{O}\mathbf{n} = \mathbf{n}$).