Informacja Kwantowa 1/2

Seria 1 i 2

do oddania na 15.10.2014

Zadanie 1. Cztery stany polaryzacji pojedynczego fotonu dane są wektorami stanu:

$$|\tau_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\tau_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, |\tau_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{2\pi i/3}\sqrt{2} \end{pmatrix}, |\tau_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2\pi i/3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

a) Obliczyć moduły iloczynów skalarnych pomiędzy tymi stanami.

b) Znaleźć wektory Blocha. Jaką bryłę tworzą ich wierzchołki?

c) Czy istnieje pięć stanów polaryzacji dla których iloczyny skalarne pomiędzy wszystkimi różnymi kombinacjami są co do modułu sobie równe?

d) Taktując powyższe wektory jako wektory Jonesa narysować odpowiadające im elipsy polaryzacji, podając długości półosi głównych i ich orientację względem laboratoryjnego układu odniesienia.

Zadanie 2. Otrzymujemy qubit przygotowany w jednym z dwóch nieortogonalnych stanów

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

z prawdopodobieństwami odpowiednio p oraz $1-p$. Qubit mierzymy za pomocą urządzenia, które posiada dwa możliwe wyniki pomiarów odpowiadające identyfikacji stanów $|\psi\rangle$ oraz $|\chi\rangle$ i opisane jest parą dodatnio określonych operatorów $\hat{M}_\psi, \hat{M}_\chi \geq 0$, gdzie $\hat{M}_\psi + \hat{M}_\chi = \hat{\mathbb{1}}$. Za poprawną identyfikację stanu zyskujemy 1€, natomiast za błędną tracimy 1€.

a) Pokazać, że wyrażenie na średni zysk w grze P można zapisać w postaci:

$$\mathsf{P} = \mathrm{Tr}[\hat{\Delta}\hat{M}_\psi] + D,$$

gdzie operator $\hat{\Delta}$ i stała D zależą od stanow $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ oraz prawdopodobieństwa p.

b) Rozważyć rozkład operatora $\hat{\Delta}$ na wartości własne i znormalizowane wektory własne:

$$\hat{\Delta} = \lambda_1|u_1\rangle\langle u_1| + \lambda_1|u_1\rangle\langle u_1|$$

i przedyskutować, jak wybór operatora $\hat{M}_\psi$ maksymalizujący P zależy od znaków wartości własnych λ_1, λ_2.

c) Obliczyć maksymalną wartość P dla stanów $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ przygotowywanych z prawdopodobieństwami p oraz $1-p$.