Informacja Kwantowa

Seria 10

do oddania na 20.12.2019

Zadanie 1 Dla dwóch macierzy gęstości $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$ ich *relatywna entropia*—kwantowy odpowiednik dywergencji Kullbacka-Leiblera, $D_{\mathrm{KL}}(p\|q)$— zdefiniowana jest jako:

$$S(\rho\|\sigma) \coloneqq \mathrm{Tr}\{\rho \lg \rho\} - \mathrm{Tr}\{\rho \lg \sigma\}. \tag{1}$$

a) Pokaż, że $S(\rho\|\sigma) = D_{\mathrm{KL}}(\lambda\|\mu)$ dla $\rho = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i|$ i $\sigma = \sum_{i=1}^{d} \mu_i |f_i\rangle\langle f_i|$, gdzie $\forall_i : 0 \leq \lambda_i, \mu_i \leq 1$, gdy oba stany ρ i σ są diagonalne w pewnej bazie, czyli $\forall i$ s.t. $\lambda_i, \mu_i > 0 : |e_i\rangle \equiv |f_i\rangle$.

b) Udowodnij, że zawsze $S(\rho\|\sigma) \geq 0$ dla dowolnych dwóch stanów $\rho, \sigma \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_d)$.

Dla stanu współdzielonego stanu przez Alicję (A) i Boba (B), $\rho_{\mathrm{AB}} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\mathrm{A}} \otimes \mathcal{H}_{\mathrm{B}})$, *kwantowa informacja wzajemna* zdefiniowana jest jako:

$$S(\mathrm{A}:\mathrm{B}) \coloneqq S(\mathrm{A}) + S(\mathrm{B}) - S(\mathrm{A},\mathrm{B}) = S(\mathrm{A}) - S(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = S(\mathrm{B}) - S(\mathrm{B}|\mathrm{A}), \tag{2}$$

gdzie $S(\mathrm{X}) \coloneqq S(\rho_{\mathrm{X}})$ z $\mathrm{X} \in \{\mathrm{AB}, \mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ to *entropia von Nuemanna* odpowiednio dla: stanu współdzielonego ρ_{AB}; i zredukowanych macierzy gęstości, ρ_{A} i ρ_{B}, Alicji i Boba; a $S(X|Y) \coloneqq S(X,Y) - S(Y)$ to *entropia warunkowa.*

a) Korzystając z dodatniości entropii relatywnej (lub inaczej) pokaż, że entropia von Neumanna jest subaddytywna dla stanów współdzielonych: $S(\mathrm{A},\mathrm{B}) \leq S(\mathrm{A}) + S(\mathrm{B})$; a co za tym idzie $S(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \leq S(\mathrm{A})$, czyli losowość ("nieporządek") układu A nie może wzrosnąć kiedy poznamy stan układu B.

b) Udowodnij, że po zadziałaniu dowolnym kanałem kwantowym Λ po stronie Boba (lub podobnie po stronie Alicji), $\rho_{\mathrm{AB'}} = \mathcal{I} \otimes \Lambda[\rho_{\mathrm{AB}}]$ (lub $\rho_{\mathrm{A'B}} = \Lambda \otimes \mathcal{I}[\rho_{\mathrm{AB}}]$) kwantowa informacja wzajemna nie może wzrosnąć tzn.:

$$S(\mathrm{A}:\mathrm{B'}) \leq S(\mathrm{A}:\mathrm{B}) \qquad (\text{lub} \quad S(\mathrm{A'}:\mathrm{B}) \leq S(\mathrm{A}:\mathrm{B})). \tag{3}$$

Zadanie 2 Alicja przesyła informacje do Boba za pomocą kanału kwantowego, który w każdym użyciu umożliwia przesłanie qubitu w jednym z czterech stanów $\{|0\rangle, |1\rangle, |+\rangle, |-\rangle\}$.

a) Rozważając dowolne nieujemne prawdopodobieństwa wysłania każdego z czterech stanów (zawsze spełniające $p_0 + p_1 + p_+ + p_- = 1$), pokaż że (asymptotyczny) współczynnik *kompresji Schumachera*, R_∞, może przyjmować wszystkie wartości $0 \leq R_\infty \leq 1$ i omów przypadki graniczne $R_\infty = 0$ i $R_\infty = 1$.

b) W przypadku gdy w kanale występuje szum zaburzający stany $\{|+\rangle, |-\rangle\}$, który odpowiada kwantowej (CP) mapie:

$$\mathcal{E}_\eta[\rho] = \frac{1+\eta}{2}\rho + \frac{1-\eta}{2}\hat{\sigma}_z \rho \hat{\sigma}_z, \tag{4}$$

gdzie $0 \leq \eta \leq 1$ określa siłę zaszumiania (defazowania), wyznacz *ograniczenie Holevo*, χ, na informacje, którą Alicja może zakodować w pojedynczym qubicie tak aby została bezstratnie odzyskana przez Boba. Dla jakich wartości η Alicja może nadal przesyłać w sposób idealny jeden klasyczny bit informacji wybierając odpowiednio $p_0 + p_1 + p_+ + p_- = 1$?

c) Powtórz powyższą analizę gdy w kanale występuje szum równomiernie zaburzający wszystkie cztery stany:

$$\mathcal{E}_\eta[\rho] = \frac{1+3\eta}{4}\rho + \sum_{i=1}^{3} \frac{1-\eta}{4}\hat{\sigma}_i \rho \hat{\sigma}_i. \tag{5}$$

W szczególności, narysuj ograniczenie Holevo, $\chi(eta)$ w funkcji $0 \leq \eta \leq 1$. Dlaczego tym razem Alicja może idealnie przesyłać jeden bit klasyczny tylko kiedy $\eta = 1$?