Informacja Kwantowa

Seria 3

do oddania na 25.10.2019

Zadanie 1 Rozważmy model eksperymentu Sterna-Gerlacha w którym atom o spinie 1/2 i momencie magnetycznym μ porusza się w kierunku x przelatując przez obszar pola magnetycznego skierowanego w kierunku z, zmieniającego się liniowo w tym kierunku [1]: $\vec{B}(z) \approx (B_0 + kz)\hat{e}_z$. Przyjmijmy, że atom oddziałuje z polem magnetycznym oddziaływaniem danym Hamiltonianem

$$H = -\mu\vec{\sigma}\vec{B} = -\mu\sigma_z(B_0 + kz), \tag{1}$$

przy czym oddziaływanie trwa czas δt, w którym to czasie przyjmujemy, ze atom czuje wciąż takie samo pole magnetyczne B.

Niech stan początkowy atomu będzie postaci: $|\Psi(0)\rangle = |s\rangle \otimes |\varphi\rangle_z$, gdzie $|s\rangle = a|+\frac{1}{2}\rangle + b|-\frac{1}{2}\rangle$ jest ogólnym stanem spinowym atomu, natomiast $|\varphi\rangle_z$ opisuje przestrzenne stopnie swobody atomu w kierunku osi z (dla uproszczenia pomijamy kwantowy opis kierunków x,y. Kierunek y jest nieistotny, a w kierunku x mówimy po prostu, że cząstka przelatuje przez urządzenie pomiarowe.). Przyjmijmy, że $|\varphi\rangle_z$ jest stanem Gaussowskim postaci (używamy reprezentacji pędowej):

$$|\varphi\rangle_z = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} \int \mathrm{d}p\, e^{-p^2/(4\sigma^2)} |p\rangle \tag{2}$$

a) Znajdź stan końcowy $|\Psi(\delta t)\rangle$, czyli stan atomu po przejściu przez urządzenie (pomiń ewolucję swobodną w przestrzennych stopniach swobody, uwzględnij jedynie Hamiltonian oddziaływania. Dla uproszczenia możesz również przyjąć $B_0 = 0$).

b) Oblicz zredukowaną spinową macierz gęstości — tzn. stan atomu po wyśladowaniu po przestrzennych stopniach swobody. Zinterpetuja tę ewolucję w obrazie kuli Blocha.

c) Zapisz superoperator Φ_Λ pozwalający na obliczenie końcowej macierzy gęstości spinu na podstawie stanu początkowego

d) Zapisz odpowiednią macierz dynamiczną i wyznacz kanoniczne operatory Krausa opisujące ewolucję spinu.

Zadanie 2 Rozważ transformację, sfery Blocha gdzie vector Blocha stanu wyjściowego $\vec{n}'$ wyraża się przez wektor wejściowy $\vec{n}$ poprzez transformację: $n'_i = \eta_i n_i$, gdzie $\eta_x = \eta_y = 1$, $\eta_z = \eta$ $(0 \le \eta < 1)$, czyli kula Blocha kurczy się w stronę "naleśnika". Czy taka transformacja jest fizycznie dozwolona? (czyli czy jest odwzorowaniem całkowicie dodatnim)—skorzystaj bezpośrednio z wyników uzyskanych na ćwiczeniach.

[1] To jest przybliżenie, bo takie pole nie spełniałoby równania Maxwella $\mathrm{div}\vec{B} = 0$, czyli musi coś się dziać też w innych kierunkach...