Informacja Kwantowa

Seria 5

do oddania na 15.11.2019

Zadanie 1

Rozważmy stan czysty dwóch qubitów postaci

$$|\Psi\rangle_{AB} = \frac{1}{4}\Big((1+\sqrt{3})\,|00\rangle + \mathrm{i}(1-\sqrt{3})\,|01\rangle + (1-\sqrt{3})\,|10\rangle + \mathrm{i}(1+\sqrt{3})\,|11\rangle\Big) \tag{1}$$

Dokonaj *rozkładu Schmidta* $|\Psi\rangle_{AB}$:

$$|\Psi\rangle_{AB} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \, |e_i\rangle_A \, |f_i\rangle_B \,, \tag{2}$$

podając *współczynniki Schmidta,* λ_i, i wektory bazowe $\{|e_i\rangle_A\}$, $\{|f_i\rangle_B\}$ dla, odpowiednio, pierwszego qubitu (A) i drugiego qubitu (B). Czy $|\Psi\rangle_{AB}$ to stan *maksymalnie splątany*?

Zadanie 2 (dokończenie na następnej stronie)

Rozważmy ogólny stan (mieszany) *trzech* qubitów (oznaczonych A, B i C):

$$\rho = \sum_{i,i',j,j',k,k'=0}^{1} \rho^{ijk}_{i'j'k'} \;\; |ijk\rangle_{\mathrm{ABC}} \langle i'j'k'| = \sum_{i,i',j,j',k,k'=0}^{1} \rho^{ijk}_{i'j'k'} \;\; |i\rangle_{\mathrm{A}} \langle i'| \otimes |j\rangle_{\mathrm{B}} \langle j'| \otimes |k\rangle_{\mathrm{C}} \langle k'| \tag{3}$$

a) Posługując się powyższą parametryzacją udowodnij, że

$$\rho^{T_{\mathrm{B}}} = \left(\left(\rho^{T_{\mathrm{A}}}\right)^{T_{\mathrm{C}}}\right)^{T}, \tag{4}$$

gdzie $(\ldots)^{T_{\mathrm{X}}}$ oznacza *transpozycję częściową* podsystemu (qubitu) $\mathrm{X} = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$, a $(\ldots)^{T}$ jest transpozycją całej macierzy gęstości.

b) Napisz explicite macierz gęstości trzy-qubitowego stanu:

$$\rho_\nu = \frac{\nu}{2}\left(|\Psi_-\rangle_{\mathrm{AB}} \langle \Psi_-| \otimes |0\rangle_{\mathrm{C}} \langle 0| + |0\rangle_{\mathrm{A}} \langle 0| \otimes |\Psi_-\rangle_{\mathrm{BC}} \langle \Psi_-|\right) \; + \; \frac{1-\nu}{8} \mathbb{1}_{\mathrm{ABC}} \tag{5}$$

w bazie naturalnej $(\{|000\rangle\,, |001\rangle\,, |010\rangle\,, \ldots, |111\rangle\})$, gdzie $|\Psi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$, a parametr $0 \leq \nu \leq 1$ odpowiada za wkład stanu *maksymalnie zmieszanego* tak, że $\rho_{\nu=0} = \frac{1}{8}\mathbb{1}$ (podobnie jak w przypadku dwóch qubitów w stanie Wernera omawianego na ćwiczeniach).

c) Dokonaj odpowiednio częściowej transpozycji otrzymanej macierzy gęstości by znaleźć macierze $\rho_\nu^{T_{\mathrm{A}}}$, $\rho_\nu^{T_{\mathrm{B}}}$ i $\rho_\nu^{T_C}$.

d) Znajdź *najmniejsze wartości własne*, $\lambda_{\min}$, powyższych macierzy:

$$\lambda_{\min}(\rho_\nu^{T_\mathrm{A}}) = \frac{1}{8}(1-3\nu), \tag{6}$$

$$\lambda_{\min}(\rho_\nu^{T_\mathrm{B}}) = \frac{1}{8}\left(1-\left(2\sqrt{2}+1\right)\nu\right), \tag{7}$$

$$\lambda_{\min}(\rho_\nu^{T_\mathrm{C}}) = \frac{1}{8}(1-3\nu). \tag{8}$$

e) Rozważając dla jakich zakresów ν powyższe wartości własne stają się ujemne, podaj kiedy możemy *być pewni*, że:

(a) wszystkie qubity (A, B i C) są splątane.

(b) qubit B na pewno jest splątany z qubitami A i C traktowanymi łącznie (jako jeden czterowymiarowy system).