Informacja Kwantowa

Seria 6

do oddania na 22.11.2019

Zadanie 1

a) Pokaż, że trzykubitowy czysty stan $(\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) \otimes |\Psi_-\rangle$ zawsze można zapisać jako

$$\frac{1}{2}\left[-|\Psi_-\rangle \otimes (\alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle) - |\Psi_+\rangle \otimes (\alpha_0 |0\rangle - \alpha_1 |1\rangle) + \right. \tag{1}$$

$$\left. + |\Phi_-\rangle \otimes (\alpha_0 |1\rangle + \alpha_1 |0\rangle) + |\Phi_+\rangle \otimes (\alpha_0 |1\rangle - \alpha_1 |0\rangle)\right], \tag{2}$$

gdzie $|\Psi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$, $|\Phi_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle)$ to odpowiednio stany Bella.

b) Alicja chcę przeteleportować stan $|\psi >= \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle$ do Boba, z którym współdzieli stan $|\Phi\rangle_+$. Jak powinien przebiegać protokół teleportacji?

Podpowiedź: Zauważ, że $(\hat{\sigma}_2 \otimes \mathbb{1})|\Phi_+\rangle = \mathrm{i}\,|\Psi_-\rangle$ (jak w protokole "*dense coding*").

Zadanie 2

Pokaż, że gdy rozważamy korelacje Bella zgodne z modelami zmiennych ukrytych (LHV), czyli $p(A, B|x, y) = \int \mathrm{d}\lambda\, p(\lambda)\, p(A|x, \lambda)\, p(B|y, \lambda)$, to nierówność CHSH jest zawsze spełniona, tzn.

$$|\langle A_0 B_0\rangle + \langle A_0 B_1\rangle + \langle A_1 B_0\rangle - \langle A_1 B_1\rangle| \leq 2, \tag{3}$$

gdzie $\langle A_x B_y\rangle := \sum_{A,B=\pm 1} AB\, p(A, B|x, y)$.

Podpowiedź: Zauważ, że w przypadku modeli zmiennych ukrytych (LHV) nierówność CHSH (3) można wyrazić za pomocą średnich wartości $\bar{A}_x(\lambda) := \sum_{A=\pm 1} A\, p(A|x, \lambda)$ spełniających $|\bar{A}_x(\lambda)| \leq 1$ dla każdej λ (podobnie w przypadku Boba i $\bar{B}_y(\lambda)$). Skorzystaj wtedy z tożsamości:

$$\langle A_1 B_0\rangle - \langle A_1 B_1\rangle = \int \mathrm{d}\lambda\, p(\lambda) \left[\bar{A}_1(\lambda)\bar{B}_0(\lambda) - \bar{A}_1(\lambda)\bar{B}_1(\lambda)\right] \tag{4}$$

$$= \int \mathrm{d}\lambda\, p(\lambda)\bar{A}_1(\lambda)\bar{B}_0(\lambda)\left[1 \pm \bar{A}_0(\lambda)\bar{B}_1(\lambda)\right] - \int \mathrm{d}\lambda\, p(\lambda)\bar{A}_1(\lambda)\bar{B}_1(\lambda)\left[1 \pm \bar{A}_0(\lambda)\bar{B}_0(\lambda)\right]. \tag{5}$$

Zadanie 3

Udowodnij, że

$$|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-| = \frac{1}{4}\left(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \sum_{i=x,y,x} \sigma_i \otimes \sigma_i\right). \tag{6}$$