Informacja Kwantowa

Seria 7

do oddania na 29.11.2019

Zadanie 1

Pomimo, że *idealne* klonowanie nieznanego stanu kwantowego jest niemożliwe, rozważmy transformację która dokonuje klonowania ale w sposób *przybliżony.* W szczególności, optymalna transformacja klonująca dowolny stan qubitu odpowiada operacji (bramce) unitarnej działającej na 3 qubity, takiej że:

$$U(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_{A'} \otimes |0\rangle_E) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\rangle_A \otimes |0\rangle_{A'} \otimes |0\rangle_E + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\Psi_+\rangle_{AA'} \otimes |1\rangle_E \tag{1}$$

$$U(|1\rangle_A \otimes |0\rangle_{A'} \otimes |0\rangle_E) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1\rangle_A \otimes |1\rangle_{A'} \otimes |1\rangle_E + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\Psi_+\rangle_{AA'} \otimes |0\rangle_E \tag{2}$$

a) Rozważając ogólny stan klonowanego qubitu, $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A$, znajdź wyjściowy stan po zaaplikowaniu transformacji klonującej, tzn. $|\Theta\rangle_{AA'E} = U(|\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_{A'} \otimes |0\rangle_E)$.

b) Znajdź zredukowane macierze gęstości qubitów A i A', odpowiednio:

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_{A'E}\{|\Theta\rangle_{AA'E}\langle\Theta|\} \qquad \text{i} \qquad \rho'_A = \mathrm{Tr}_{AE}\{|\Theta\rangle_{AA'E}\langle\Theta|\} \tag{3}$$

c) Oblicz jak dokładna (bliska jedności) jest *wierność* (fidelity, F) uzyskanych klonów ρ_A i ρ'_A, czyli:

$$F_A := \langle\psi|\rho_A|\psi\rangle \qquad \text{i} \qquad F_{A'} := \langle\psi|\rho_{A'}|\psi\rangle. \tag{4}$$

d) Wyznacz dowolne operatory Krausa, K_i, które opisują kanał kwantowy, $\Lambda[\bullet] = \sum_i K_i \bullet K_i^\dagger$, odpowiadający efektywnej ewolucji klonowanego qubitu A w wyniku zadziałania operacji klonującej, tzn.:

$$\rho_A = \Lambda\left[|\psi\rangle_A\langle\psi|\right] = \mathrm{Tr}_{A'E}\left\{U(|\psi\rangle_A\langle\psi| \otimes |0\rangle_{A'}\langle 0| \otimes |0\rangle_E\langle 0|)U^\dagger\right\}. \tag{5}$$

e) Znajdź macierz (operator) Choi'a-Jamiołkowskiego (CJ), tzn. $\Omega_\Lambda := \Lambda \otimes \mathcal{I}\left[|\Phi_+\rangle\langle\Phi_+|\right]$, dla powyższego kanału Λ. Dokonaj rozkładu spektralnego macierzy CJ,

$$\Omega_\Lambda = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i |e_i\rangle\langle e_i| \equiv \sum_{i=1}^{r} |K_i\rangle\!\rangle\langle\!\langle K_i|, \tag{6}$$

i wyznacz jeszcze raz operatory Krausa w najprostszej (kanonicznej) postaci posługując się tożsamością napisaną powyżej, gdzie $\forall_i :\ |K_i\rangle\!\rangle = K_i \otimes \mathbb{1}|\Phi_+\rangle$.
Jaki w takim razie jest rząd, r, kanału kwantowego Λ?