Informacja Kwantowa

Seria 8

do oddania na 6.12.2019

Zadanie 1

Udowodnij, że entropia Shannona dla dyskretnej zmiennej losowej $X \in \mathcal{X}$ o rozkładzie prawdopodobieńswa $p(X)$ zawsze może by ograniczona od góry przez:

$$H(X) = -\sum_{x\in\mathcal{X}} p(x)\lg p(x), \quad \leq \quad \lg|\mathcal{X}| \tag{1}$$

a powyższa nierówność jest zawsze wysycana tylko przez rozkład płaski $\forall_{x\in\mathcal{X}}: \; p(X=x) = \frac{1}{|\mathcal{X}|}$.

Podpowiedź: Możesz skorzystać z faktu, że *dywergencja Kullbacka-Leiblera* (relatywna entropia) jest nieujemna dla dowolnych dwóch rozkładów prawdopodobieństwa, $p(X)$ i $q(X)$, ponieważ stanowi (niesymetryczną) miarę odległości między rozkładami (dowód z ćwiczeń):

$$D(p||q) := \sum_{x\in\chi} p(x)\lg\frac{p(x)}{q(x)} \quad \geq \quad 0, \tag{2}$$

gdzie $D(p||q) = 0$ oznacza, że rozkłady p i q są identyczne. W szczególności, musi być nieujemna mierząc odległość dowolnego rozkładu od rozkładu płaskiego.

Zadanie 2

Rozważ jedno-bitowy kanał $X \to Y$, $\mathcal{X} = \mathcal{Y} = \{0,1\}$, gdzie

$$p(y|x) = \begin{array}{c|c|c} y\backslash x & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1-\eta \\ \hline 1 & 0 & \eta \end{array} \tag{3}$$

a) Znajdź informację wzajemną $I(X:Y)$ dla tego kanału kiedy $p(X=0) = \lambda$ i $p(X=1) = 1-\lambda$. Maksymalizując po parametrze λ określającym stronniczość kodowania na wejściu, znajdź pojemność (przepustowość) $\mathcal{C}$ powyższego kanału, która w ogólności wynosi:

$$\mathcal{C} := \sup_{p_X} I(X:Y) \tag{4}$$

b) Zmieniając rolami w co drugim użyciu kanału wartości X, 0 i 1, otrzymujemy binarny kanał symetryczny ("bit-flip" omawiany na ćwiczeniach) z prawdopodobieństwem błędu $\mu = (1-\eta)/2$ i pojemnością $\mathcal{C}_{\mathrm{sym}} = 1 - h(\mu)$, gdzie $h(x) = -x\lg x - (1-x)\lg(1-x)$ to entropia binarna [1]. Naszkicuj $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{C}_{\mathrm{sym}}$ w funkcji η z przedziały $0 \leq \eta \leq 1$.

c) Znajdź skalowanie wiodącego członu dla $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{C}_{\mathrm{sym}}$ w zależności od η w granicy $\eta \to 0$.

[1] Na ćwiczeniach nie musieliśmy optymalizować rozkładu wejściowego, gdyż dla kanałów symetrycznych (działających w taki sam sposób dla dowolnego X na wejściu) optymalne jest kodowanie z rozkładem płaskim, tzn. $\forall_{x\in\mathcal{X}}: \; p(X=x) = \frac{1}{|\mathcal{X}|}$.