Informacja Kwantowa 1/2

Seria przygotowawcza do egzaminu

Zadanie 1. Zaprojektować układ złożony z liniowych elementów optycznych pozwalający na optymalne (tzn. z największym prawdopodobieństwem sukcesu) jednoznaczne rozróżnienie stanów $\sqrt{\frac{2}{3}}|\leftrightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}|\updownarrow\rangle$ oraz $\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\leftrightarrow\rangle + i|\updownarrow\rangle\big)$.

Zadanie 2. Alicja wysyła Bobowi qubit przygotowany z w jednym z czterech stanów:

$$|\tau_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\tau_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, |\tau_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{2\pi i/3}\sqrt{2} \end{pmatrix}, |\tau_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ e^{-2\pi i/3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bob mierzy qubit przy użyciu miary opisanej czterema operatorami $\hat{M}_i = \frac{1}{2}|\upsilon_i\rangle\langle\upsilon_i|, i = 1,2,3,4$, gdzie

$$|\upsilon_1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, |\tau_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, |\tau_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{-2\pi i/3}\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}, |\tau_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} e^{2\pi i/3}\sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

a) Znaleźć prawdopodobieństwa warunkowe $p(i|j) = \langle\tau_j|\hat{M}_i|\tau_j\rangle$ otrzymania wyniku i jeśli Alicja wysłała stan $|\tau_j\rangle$.

b) Obliczyć informację wzajemną $I(A:B)$ gdy stany $|\tau_j\rangle$ są wysyłane przez Alicję z jednakowymi prawdopodobieństwami wynoszącymi $\frac{1}{4}$.

Zadanie 3. Przypuśćmy, że qubit Alicji z poprzedniego zadania (oznaczany odtąd indeksem A) został przechwycony przez Ewę i poddany transformacji klonującej z qubitami E oraz E' zadanej wzorami:

$$|0\rangle_A|0\rangle_E|0\rangle_{E'} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\big(|000\rangle_{AEE'} + |011\rangle_{AEE'} + |101\rangle_{AEE'} + |110\rangle_{AEE'}\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}|\Phi_-\rangle_{AE}|0\rangle_{E'}$$

$$|1\rangle_A|0\rangle_E|0\rangle_{E'} \to \frac{1}{\sqrt{6}}\big(|111\rangle_{AEE'} + |001\rangle_{AEE'} + |010\rangle_{AEE'} + |100\rangle_{AEE'}\big) - \frac{1}{\sqrt{3}}|\Phi_-\rangle_{AE}|1\rangle_{E'}$$

gdzie $|\Phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle - |11\rangle\big)$.

a) Zakładając, że stan na wejściu ma postać $|\psi\rangle_A|0\rangle_E|0\rangle_{E'}$, gdzie $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_B$ obliczyć zredukowane macierze gęstości pojedynczych qubitów A oraz E po oddziaływaniu.

b) Obliczyć wierność klonowania dla qubitów A oraz E po oddziaływaniu w funkcji stanu wejściowego. Opisać odpowiadające temu przekształcenie sfery Blocha.

c) Załóżmy, że Alicja wysyła z równymi prawdopodobieństwami jeden z czterech stanów $|\tau_j\rangle$. Przypuśćmy, że Ewa dokonuje powyższej operacji klonowania i po transformacji klonującej jeden z klonów (qubit A) wysyła B, a drugi klon (qubit E) zachowuje sobie. Zarówno Bob jak i Ewa wykonują na otrzymanym klonie pomiar zadany operatorami $\hat{M}_i$. Obliczyć $I(A:B)$, $I(A:E)$ oraz wielkość, której nie liczyliśmy na zajęciach: $I(B:E)$.

d) Obliczyć wielkość Holevo dla zestawu stanów qubitu A wysyłanych przez Alicję oraz tych po transformacji klonującej Ewy.