Informacja Kwantowa 1/2

Seria 2

do oddania na 03.03.2011

Rozważmy pomiar pozwalający w ułamku przypadków jednoznacznie zidentyfikować dwa nieortogonalne stany kwantowe qubitu

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \qquad |\chi\rangle = \begin{pmatrix} -\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix},$$

gdzie $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Pomiar jest scharakteryzowany trzema operatorami:

$$\hat{M}_\psi = \mu_1 |\chi^\perp\rangle\langle\chi^\perp|, \quad \hat{M}_\chi = \mu_2 |\psi^\perp\rangle\langle\psi^\perp|, \quad \hat{M}_? = \hat{\mathbb{1}} - \hat{M}_\psi - \hat{M}_\chi,$$

gdzie rzeczywiste parametry μ_1, μ_2 są nieujemne oraz

$$|\chi^\perp\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad |\psi^\perp\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ -\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Na płaszczyźnie parametrów (μ_1, μ_2) wyznaczyć obszar, dla którego operator $\hat{M}_?$ jest dodatnio określony, tzn. jego wszystkie wartości własne są nieujemne.

b) Pokazać, że dla jednakowo prawdopodobnych stanów $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ uśredniona szansa poprawnego zidentyfikowania stanu otrzymanej cząstki, dana przez $\frac{1}{2}(\langle\psi|\hat{M}_\psi|\psi\rangle + \langle\chi|\hat{M}_\chi|\chi\rangle)$, jest największa gdy $\mu_1 = \mu_2$.

c) Pokazać graficznie, jak dobrać współczynniki μ_1 i μ_2 w sytuacji gdy stany $|\psi\rangle$ i $|\chi\rangle$ otrzymujemy z różnymi prawdopodobieństwami.