Cwiczenia 14

10 kwietnia 2014
22:53

Atom wodoru $\quad V(r) = -k\dfrac{e^2}{r}$

$$\psi_{n,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{n,l}(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(rR(r)\big) + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} - k\frac{e^2}{r} - E\right]R(r) = 0$$

μ masa zredukowana $\quad \dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_e} + \dfrac{1}{m_p}$

Rozwiązania:

$$R_{nl}(r) = \underbrace{\left(\frac{2}{na_0}\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n\left[(n+l)!\right]^3}}}_{N_{n,l}} \cdot \left(\frac{2r}{na_0}\right)^{l} \cdot e^{-\frac{r}{na_0}}\, L^{2l+1}_{n+l}\left(\frac{2r}{na_0}\right)$$

$$E_{n,l} = -k\frac{e^2}{2a_0}\frac{1}{n^2}$$

$n = 1, \dots, \infty$, $\quad l = 0, \dots, n-1$, $\quad m = -l, l$

n	l	m		
1	0 (s)	0	$\}\ 1$	E_1
2	0 (s)	0	$\}\ 4$	E_2
	1 (p)	$-1, 0, 1$		
3	0 (s)	0	$\}\ 9$	E_3 $\quad n^2$
	1 (p)	$-1, 0, 1$		
	2 (d)	$-2, -1, 0, 1, 2$		

jeśli uwzględnimy spin to same wszystkie stany $\times 2$.

jeśli uwzględnić spinie to mamy wszystkie stany ×2.

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{\mu e^2 k}$$ – pr. Bohra $\simeq 0{,}5\,\mathring{A}$

Wiel. Laguerra:

$$L_k(r) = e^{r} \frac{d^k}{dr^k}\left(r^k e^{-r}\right)$$

$$L_k^N(r) = \frac{d^N}{dr^N} L_k(r)$$

1 Dla stanu 1s w atomie wodoru obliczyć $\langle r \rangle$, $\langle r^2 \rangle$, Δr oraz najbardziej prawdopodobną wartość r: ($\max P(r) = |\psi|^2 r^2$)

$n=1$, $l=0$

$$R_{10} = -\left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} L_1^1(r)$$

$$L_1^1(r) = \frac{d}{dr}\left(e^{r}\left(e^{-r} - r e^{-r}\right)\right) =$$

$$= -1$$

$$R_{10} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{r}{a_0}} = \frac{2}{a_0^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r}{a_0}}$$

Upewnimy się że jest unormowane:

[illegible]

$$\int_0^\infty r^2 \frac{4}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} = \qquad t=\frac{2r}{a_0} \qquad =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int_0^\infty t^2 e^{-t} = 1 \qquad \text{ok}$$

$$\langle r\rangle = \int r^3 \frac{4}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} =$$

$$= \frac{a_0}{4}\cdot\int t^3 e^{-t} = \frac{3}{2}a_0$$

$$\langle r^2\rangle = \int r^4 \frac{4}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} = \frac{a_0^2}{8}\cdot\int t^4 e^{-t} =$$

$$= 3a_0^2$$

$$\Delta r = \sqrt{3a_0^2 - \frac{9}{4}a_0^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_0$$

$$P(r) = r^2 \frac{4}{a_0^3} e^{-\frac{2r}{a_0}} \qquad \frac{dP(r)}{dr} = 0$$

$$2r e^{-\frac{2r}{a_0}} - \frac{2r^2}{a_0} e^{-\frac{2r}{a_0}} = 0$$

Wart. najbardziej prawdopodobna, $r = a_0$

Co by było gdyby proton i elektron oddziaływały tylko siłą grawitacyjną

Zamiast $ke^2 \to G m_e m_p$

Jak jakby wziąć $e'^2 = \frac{G m_e m_p}{k}$

$$a_0' = a_0 \frac{ke^2}{\ldots} = 0{,}5\,\text{Å} \cdot \frac{10^{10}\cdot 10^{-38}}{\ldots}$$

$\underbrace{Gm_em_p}$

$$G \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-30} \cdot 10^{-27}$$

$$= 0{,}5 \cdot 10^{30}\,m$$

$$\simeq 10^{15}\ ly$$

$k = 9 \cdot 10^{9}$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$

$G = 6{,}6 \cdot 10^{-11}$

$m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$

$m_p = 1{,}6 \cdot 10^{-27}$

$1\,ly = 10^{15}\,m$