Cwiczenia 19

8 maja 2014
15:06

1. Poprawka relatywistyczna do energii kinetycznej w stanie wodoru

$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 ...$

$$E_k^{(nr)} = \frac{p^2}{2m} \qquad E_k^{(r)} = mc^2\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{m^2c^2}} - 1\right) \simeq$$

$$\simeq mc^2\left(1 + \frac{p^2}{2m^2c^2} - \frac{1}{8}\left(\frac{p^2}{m^2c^2}\right)^2 - 1\right)$$

$$= \frac{p^2}{2m} - \frac{p^4}{8m^3c^2}$$

Musimy obliczyć:

$$H^{(nr)} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{ke^2}{r}$$

$$\langle n,l,m|\, p^4 \,|n,l,m\rangle$$

Wiemy że $\hat{p}^2 = 2m\left(\hat{H}^{(nr)} + \frac{ke^2}{r}\right)$

$$\langle p^4\rangle = 4m^2\left\langle \hat{H}^2 + \hat{H}\frac{ke^2}{r} + \frac{ke^2}{r}\hat{H} + \frac{k^2e^4}{r^2}\right\rangle$$

$$= 4m^2\left(E_n^2 + 2E_n ke^2\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle + k^2e^4\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle\right)$$

Liczyliśmy wcześniej

$$E_n = -k\frac{e^2}{2a_0}\cdot\frac{1}{n^2}$$

$$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = \frac{1}{a_0 n^2}$$

Potrzebujemy jeszcze $\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle$

skorzystajmy z tw. H-F, Hamiltonian w sferycznych:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \left[\frac{\hat{L}^2}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}\right]$$

mamy $\frac{1}{r^2}$

Licząc na stanach $R_{nl}(r)\,Y_{lm}(\theta,\varphi)$ mamy problem jednowymiarowy z H_r:

$$\hat{H}_r = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}r + \left[\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - \frac{ke^2}{r}\right]$$

$$\hat{H}_r \cdot R_{n,l}(r) = E_{n,l} R_{nl}(r) \qquad E_{nl} = -\frac{k}{2a_0}\frac{1}{n^2}$$

potraktujmy „l" jako parametr ciągły

$$\frac{d\hat{H}_r}{dl} = \frac{\hbar^2(2l+1)}{2mr^2}$$

$$\frac{\hbar^2(2l+1)}{2m}\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = \frac{dE_n}{dl}$$

Uwaga ? przypomnijmy sobie wyprowadzenie E_n ...

$$R_{nl} = r^{l+1}\rho(r)e^{-\lambda r} \qquad E = \qquad \left\{ a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2k} \right.$$

$$n = N + l + 1$$

N potęga na której urywa się wielomian $\rho(r)$ w rozwinięciu

$$E = -\frac{k}{2a_0}\frac{\kappa^L}{(N+l+1)^2} \qquad \frac{dE}{dl} = \frac{2k}{2a_0}\frac{1}{(N+l+1)^3} = \frac{ke^2}{a_0 n^3}$$

$$\left\langle\frac{1}{r^2}\right\rangle = \frac{ke^2}{a_0 n^3}\cdot\frac{2m}{\hbar^2(2l+1)} = \frac{2}{a_0^2}\frac{1}{n^3(2l+1)}$$

poprawka

$$E^{(1)} = -\frac{1}{8m^3c^2}\langle p^4\rangle = -\frac{1}{8m^3c^2}\cdot$$

$$\cdot 4m^2\cdot\left(k^2\frac{e^4}{4a_0^2}\frac{1}{n^4} - \frac{k^2e^4}{a_0}\frac{1}{n^2}\frac{1}{a_0}\cdot\frac{1}{n^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{k^2e^4\cdot 2}{a_0^2 n^3(2l+1)}\right) =$$

$$= -\frac{k^2e^4}{2mc^2a_0^2n^4}\left(-\frac{3}{4}+\frac{2n}{2l+1}\right)=\underbrace{\frac{k^2e^4}{8mc^2a_0^2}}_{\simeq\, 7\cdot 10^{-5}\,eV}\frac{1}{n^4}\left(\frac{8n}{2l+1}-3\right)$$

$$\left\{\alpha=\frac{ke^2}{\hbar c}\right.$$

2. Model Focka-Darwina

cząstka w polu $\hat{B}=B\hat{e}_z$ + dodatkowo w pułapce harmonicznej $V=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$. Znaleźć energie własne...

$$H=\frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$B=\vec{\nabla}\times\vec{A}\qquad B=\begin{bmatrix}0\\0\\B\end{bmatrix}$$

wygodnie będzie zrobić w cechowaniu symetrycznym

$$A=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-By\\Bx\\0\end{bmatrix}$$

$$H=\frac{1}{2m}\left[\left(p_x+\frac{eBy}{2}\right)^2+\left(p_y-\frac{eBx}{2}\right)^2+p_z^2\right]+\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+y^2)$$

$$[H,p_z]\Rightarrow \psi(x,y,z)=e^{\frac{ip_z z}{\hbar}}\psi(x,y)$$

ograniczamy się do 2D

$$=\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\underbrace{(\omega^2+\Omega^2)}_{\Omega'^2}(x^2+y^2)+\Omega(p_xy-xp_y)$$

$$\left(\Omega=\frac{eB}{\ldots}\right.$$

$$\Omega = \frac{eB}{2m} \qquad \tilde{\Omega}$$

$$x = \frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\tilde{\Omega}}} \qquad p_x = \frac{a-a^\dagger}{\sqrt{2}i}\sqrt{\hbar m\tilde{\Omega}}$$

$$y = \frac{b+b^\dagger}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\hbar}{m\tilde{\Omega}}} \qquad p_y = \frac{b-b^\dagger}{i\sqrt{2}}\sqrt{\hbar m\tilde{\Omega}}$$

$$= \hbar\tilde{\Omega}\left(a^\dagger a + b^\dagger b + 1\right) + \frac{\hbar\Omega}{2i}\Big((a-a^\dagger)\cdot(b+b^\dagger) -$$

$$-(a+a^\dagger)(b-b^\dagger)\Big)$$

$$= \hbar\tilde{\Omega}\left(a^\dagger a + b^\dagger b + 1\right) + \frac{\hbar\Omega}{i}\left(ab^\dagger - a^\dagger b\right)$$

$$= \hbar\tilde{\Omega} + \hbar\tilde{\Omega}\,[a^\dagger, b^\dagger]\begin{bmatrix} 1 & \frac{i\Omega}{\tilde{\Omega}} \\ -\frac{i\Omega}{\tilde{\Omega}} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2 - \left(\frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}\right)^2 \qquad \lambda_+ = 1 + \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}} \qquad \lambda_- = 1 - \frac{\Omega}{\tilde{\Omega}}$$

$$\hat{c} = (i\,\hat{a} + \hat{b})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{d} = (\hat{a} + i\hat{b})\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$H = \hbar\tilde{\Omega} + \hbar(\tilde{\Omega} + \Omega)c^\dagger c + \hbar(\tilde{\Omega} - \Omega)d^\dagger d$$

$$= \hbar\Omega_+\left(c^\dagger c + \frac{1}{2}\right) + \hbar\Omega_-\left(d^\dagger d + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Omega_\pm = \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{eB}{2m}\right)^2} \pm \frac{eB}{2m}$$

Jeśli $\omega = 0$ mamy dodatkową degenerację ze względu na $\Omega_- = 0$.

Stany można numerować $|n_c, n_d\rangle$

Stan podstawowy $\quad c|0,0\rangle = 0$

$$d|0,0\rangle = 0$$

dobry będzie $|0,0\rangle = \Psi_{00}(x,y) = N e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m\Omega}{\hbar}}(x^2+y^2)}$

bo dla niego $a|0,0\rangle = 0$, $b|0,0\rangle = 0$ czyli $(a+ib)|0,0\rangle = 0$

Kolejne stany uzyskamy działając

$$|n_c, n_d\rangle = \frac{(c^+)^{n_c}}{\sqrt{n_c!}} \frac{(d^+)^{n_d}}{\sqrt{n_d!}} |0,0\rangle$$