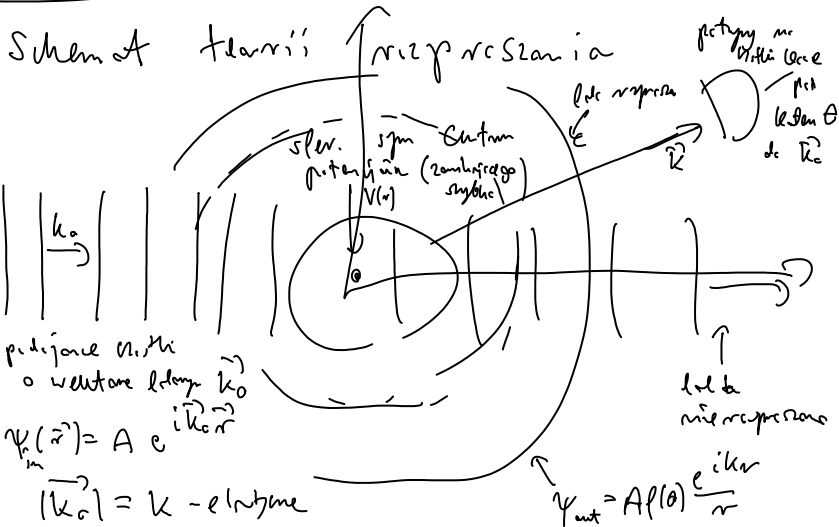


Przybliżenie Barma



przebiegające w prawo  
o wektorze falowym  $\vec{k}_0$   
 $\psi_{in}(\vec{r}) = A e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$   
 $|\vec{k}_0| = k$  - energia

$\psi_{out} = A f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} rR + \left( \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) - E \right) R = 0$$

w granicy  $r \rightarrow \infty$        $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$       amplituda rozpraszania

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} rR = E R_r \Rightarrow \frac{d^2 rR}{dr^2} = -k^2 rR$$

$$\Rightarrow rR = A e^{ikr} + B e^{-ikr}$$

f.l. rosnąca      f.l. zbiegająca

• Strumień prądu p.d. b. d. u. s. t. w. a:

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - (\vec{\nabla} \psi^*) \psi)$$

dlc.  $\psi_{in}(\vec{r}) = A e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (A e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} i\vec{k}_0 e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + i\vec{k}_0 e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - (-i\vec{k}_0)) = \frac{\hbar k_0}{m} |A|^2 \vec{e}_x$$

dlc.  $\psi_{out}(\vec{r}) = A e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} f(\theta)$        $I_0 = \frac{\hbar k}{m} |A|^2$

$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$   
 natomiast nie możemy skorzystać z kątów (ciężko znaleźć przez sferę.)

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} \left( |A|^2 \frac{e^{-i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}}{r} f^*(\theta) \left( \frac{i\vec{k}_0}{r} - \frac{1}{r^2} \right) e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} f(\theta) - c.c \right) =$$

$$= \frac{\hbar}{2mi} |A|^2 |f(\theta)|^2 \frac{2i\vec{k}_0}{r^2} = \frac{\hbar |A|^2 |f(\theta)|^2 k}{m r^2}$$

$$I_{\Omega} = \frac{\hbar |A|^2 |f(\theta)|^2 k}{m r^2} r^2 d\Omega$$

Chcemy obliczyć różniczkowy przekrój czynny:  $d\sigma(\theta, \phi)$

(licze cięteł rozpraszonych w jednostkę kąta byłoby w 1s)  
 (czyli nie kątów  $\theta, \varphi$  w stosunku do  
 symetrii układu p-kołowego)

$$\frac{d\sigma(\theta, \varphi)}{d\Omega} = \frac{I_{sc}}{I_0} - \text{str. uciek rozpraszonych w } \varphi \text{ do kąt } \theta, \varphi$$

$[m^2]$   
 $I_0$  - strażnik u. p-kołowy

$$= |f(\theta)|^2$$

Całkowity przekrój czynny  $\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\Omega - [m^2]$

Objęcie metodą elementów  $f(\theta)$ :

Równanie Schrödingera

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta^2 \psi + V(r)\psi = E\psi$$

Tak żeby dla  $r \rightarrow \infty$  do rozwiązania miało postać

$$A \left( e^{i k_0 r} + f(\theta) \frac{e^{i k r}}{r} \right)$$

I z tego wyznaczamy  $f(\theta)$ .

Rozwiązanie w postaci całkowej:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{in}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi(\vec{r}')$$

$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$   
 Intuicja: rozpraszanie na potencjale w postaci bali kulistych

$$(\Delta^2 + k^2) \frac{e^{ikr}}{r} = \delta^{(3)}(r)$$

wtedy dla  $r \neq 0$  a dla  $r=0$  scaling po boku

$$\int_K (\Delta^2 + k^2) \frac{e^{ikr}}{r} = \int_K \Delta^2 \left( \frac{e^{ikr}}{r} \right) - \lim_{r \rightarrow 0} \frac{4\pi r^2}{3} \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ikr}}{r} = ik \frac{e^{ikr}}{r} \cdot 4\pi r^2 - \frac{e^{ikr}}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \stackrel{r \rightarrow 0}{=} 1 \quad \text{ok}$$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + V(r) \right) \psi(r) = -V(r)\psi(r) + V(r)\psi(r) =$$


Mein to rozwinąć sterogimie

o pierwszy model:

$$\psi(\vec{r}) = \psi_{in}(\vec{r}) - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{i\mathbf{k}(\vec{r}-\vec{r}')}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}') \psi_{in}(\vec{r}')$$

Przybliżenie Borna:

przyjmujemy, że  $\vec{r} \gg \vec{r}'$  czyli detektor daleko od obszaru gdzie działa centrum symetrii


$$|\vec{r}-\vec{r}'| \approx r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}$$


$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$$\psi(\vec{r}) = A \left( e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \vec{r}'} e^{-i\mathbf{k} \cdot \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}}{r} V(\vec{r}') e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}'} \right)$$

$$= A \left( e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \vec{r}}}{r} \cdot \frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' V(\vec{r}') e^{i(\vec{k}_0 - \vec{k}) \cdot \vec{r}'} \right)$$

W przypadku elastycznym  $|\vec{k}_0| = |\vec{k}| = k$   $\vec{k} = k \frac{\vec{r}}{r}$

$$|\vec{k}_0 - \vec{k}| = K \quad K = 2k_0 \sin \frac{\theta}{2}$$


$$\int d^3r' V(\vec{r}') e^{i\mathbf{K} \cdot \vec{r}'} \cos \theta = 2\pi \int dr' r'^2 V(r') \sin \theta e^{iK r' \cos \theta}$$

$$= 2\pi \int_0^\infty r'^2 V(r') \int_0^\pi e^{iK r' \cos \theta} \sin \theta d\theta = 2\pi \int_0^\infty \frac{2r'}{K} \sin K r' V(r') dr'$$

Cyfl:

$$\psi(\vec{r}) = A \left( e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} - \frac{e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \vec{r}}}{r} \underbrace{\frac{2m}{\hbar^2 K} \int_0^\infty dr r V(r) \sin Kr}_{f(\theta)} \right)$$

$$f(\theta) = - \frac{2m}{\hbar^2 K} \int_0^\infty dr r V(r) \sin Kr, \quad K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

1. zadanie (potencjał Yukawy)

$$V(r) = \frac{Zq^2}{r} e^{-\frac{r}{a}}$$

$$\int_0^\infty dr e^{-\frac{r}{a}} \sin Kr = \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-\frac{r}{a}} (e^{iKr} - e^{-iKr})$$

$$= \frac{1}{2i} \left( \int_0^\infty e^{-r(\frac{1}{a} - ik)} - e^{-r(\frac{1}{a} + ik)} \right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot \left( \frac{1}{\frac{1}{a} - ik} - \frac{1}{\frac{1}{a} + ik} \right) \stackrel{= -1}{=} \frac{\frac{1}{a} - ik - \frac{1}{a} + ik}{a^2 + k^2} =$$

$$= -\frac{1}{2i} \cdot \frac{-2ik}{a^2 + k^2} = \frac{k a^2}{1 + k^2 a^2}$$

$$P(\theta) = -\frac{2m Z q^2}{\hbar^2} \cdot \frac{a^2}{1 + k^2 a^2} = -\frac{2m Z q^2}{\hbar^2} \frac{1}{\frac{1}{a^2} + 4k^2 m^2 \frac{a^2}{2}}$$

Przebiegi uogly:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4m^2 Z^2 q^4}{\hbar^4} \left( \frac{1}{a^2 + 4k^2 m^2 \frac{a^2}{2}} \right)^2$$

Jedli  $\frac{1}{a} \ll k$  rozum. uogly

$$a \gg \lambda$$

$$P(\theta) = -\frac{m Z q^2}{2\hbar^2 k^2 m^2 \frac{a^2}{2}} = -\frac{m Z q^2}{4m E r^2 \frac{a^2}{2}} = \frac{Z q^2}{4E r^2 \frac{a^2}{2}}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left( \frac{Z q^2}{4E} \right)^2 \frac{1}{m^2 \frac{a^2}{2}} \quad \left( \text{formu. Rutherforda} \right. \\ \left. \text{dlu p. Coulomba ok} \right)$$

Jedli  $a \ll \lambda$  reprezentacja potrójna

## 2. Fale paraboliczne

Pomietory iu oglyne subony nru. nru Sch.

2 asymptotycznym: wamband!

$$\left( e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right)$$

Oglyne nru. nru. Schrodinger daleko od potygnu i  
maly zapisoi: tu jed nru swibne

$$\psi(\vec{r}) = \sum_l \left[ A_l j_l(kr) + B_l n_l(kr) \right] P_l(\cos\theta) \quad r \rightarrow \infty \approx$$

$$= \sum_l C_l \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) \cdot P_l(\cos\theta)$$

↑  
pny bndu reprezentacja  
 $\delta_l = 0$

Przyrównujemy:

$$\left( e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right) = \sum_l C_l \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos\theta)$$

Korzystaj z relacji i m. duży k<sub>r</sub>:

$$e^{i k r \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l \frac{\sin(kr - \frac{\pi}{2} l)}{kr} P_l(\cos \theta)$$

$$\sum_l \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \left[ C_l \sin(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_l) - (2l+1) i^l \sin(kr - \frac{\pi}{2} l) \right] e^{-i \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{f(\theta)}{r} e^{i kr - i \frac{\pi}{2}}$$

$$\left\{ \sin(kr - \frac{\pi}{2} l + \delta_l) = \sin(kr - \frac{\pi}{2} l) \cos \delta_l + \cos(kr - \frac{\pi}{2} l) \sin \delta_l \right.$$

$$f(\theta) = \sum_l \frac{1}{k} C_l \sin \delta_l \frac{1}{i^l} P_l(\cos \theta)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_l \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \left[ C_l \cos \delta_l - (2l+1) i^l \right] \frac{1}{i^l} &= i \frac{f(\theta)}{r} \\ \sum_l \frac{1}{kr} P_l(\cos \theta) \left[ C_l (\cos \delta_l - i \sin \delta_l) - (2l+1) i^l \right] \frac{1}{i^l} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$$C_l = (2l+1) i^l e^{i \delta_l}$$

$$f(\theta) = \sum_l \frac{1}{k} (2l+1) e^{i \delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta)$$

$$0 = 2\pi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta |f(\theta)|^2 =$$

$$= 2\pi \sum_l \frac{1}{k^2} |C_l|^2 \sin^2 \delta_l \frac{2}{2l+1} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l \frac{|C_l|^2 \sin^2 \delta_l}{2l+1} =$$

$$\left\{ \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \right.$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum (2l+1) \sin^2 \delta_l = \frac{4\pi}{k^2} |\ln f(\theta)|$$

$$= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l \approx \frac{4\pi}{k} \left| \ln f(\theta) \right|$$

↑  
Tw. optyczne

### Przykład 1

Reprezentacja nr sferycznej sfery o promieniu  $a$

Rozwiązanie:

$$R_c(r) = \left( A_c j_l(kr) + B_c n_l(kr) \right), \quad R_c(a) = 0$$

$$= A_c \left( j_l(kr) - \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} n_l(kr) \right) \quad r \rightarrow \infty \approx$$

$$= \frac{A_c}{kr} \left( \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) - \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)} \cos\left(kr - \frac{\pi l}{2}\right) \right) \approx$$

$$= \frac{A}{kr} \sin\left(kr - \frac{\pi l}{2} + \delta_l\right), \quad \tan \delta_l = \frac{j_l(ka)}{n_l(ka)}$$

dla małych  $ka \ll 1$  (małe energie)

$$\tan \delta_l \approx \frac{(ka)^{2l+1}}{(2l+1)!! (2l-1)!!} \quad \text{dla } l > 0$$

$$\tan \delta_0 = ka$$

$$|f(\theta)|^2 \approx \frac{1}{k^2} \sin^2 \delta_0 = a^2$$

$$\sigma = 4\pi a^2$$

Czyli mamy wielkość niezależną od energii

W granicy dużej energii,  $ka \gg 1$

$$A = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{l_{\max} \approx ka} (2l+1) \sin^2 \delta_l \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{ka} (2l+1)$$

$$\theta \approx \frac{4\pi}{k^2} \sum_L (2L+1) m^2 \delta_L \approx \frac{2\pi}{k^2} \sum_{L=0}^{\infty} (2L+1)$$

$$\approx \frac{2\pi}{k^2} \frac{1 + 2k_0 + 1}{2} \cdot k_0 \approx 2\pi a^2$$

$\delta_L =$

$a \cdot k_0 = 50$

