Cwiczenia 22

26 maja 2014
23:21

1. Stacjonarna funkcja Greena

przypomnijmy „czasową funkcję Greena:

$$G(\bar r,\bar r',t)=\sum_n e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\psi_n(\bar r)\,\psi_n^*(\bar r')$$

gdzie $\hat H\,\psi_n(\bar r)=E_n\,\psi_n(\bar r)$

t.ż.:

$$\psi(\bar r,t)=\int d^3\bar r'\,G(\bar r,\bar r',t)\,\psi(\bar r',0)$$

wygodnie jest wprowadzić f. Greena retardowaną czyli:

$$G_+(\bar r,\bar r',t)=\begin{cases}G(\bar r,\bar r',t), & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$$

„zachowuje przyczynowość.”

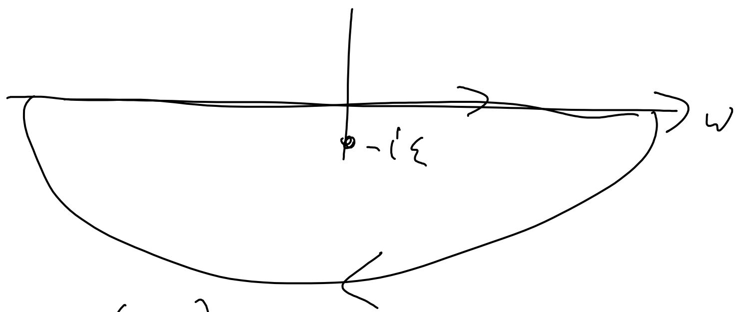
Pisząc inaczej:

$$G_+(\bar r,\bar r',t)=\sum_n \Theta(t)\,e^{-\frac{iE_n t}{\hbar}}\psi_n(\bar r)\,\psi_n^*(\bar r)$$

Udowodnijmy najpierw że:

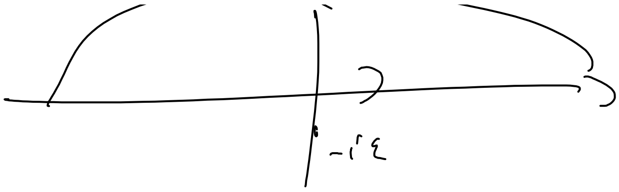
$$\Theta(t)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{\omega+i\varepsilon}.$$

$t>0$



$$\Theta(t)=-(-1)=1$$

$t<0$



$$\Theta(t) = 0$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0} -\frac{1}{2\pi i}\int \frac{-i\omega e^{i\omega t}}{\omega+i\varepsilon} = \frac{1}{2\pi}\int e^{i\omega t} d\omega = \delta(t)$$

ok

$$G(\bar r, \bar r', t) = \sum_n \int -\frac{1}{2\pi i}\frac{e^{-i\omega t}}{\omega+i\varepsilon} d\omega \, e^{-\frac{i\omega_n t}{\hbar}} \psi_n(\bar r)\psi_n^*(\bar r')$$

$\omega \to \omega - \omega_n$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, e^{-i\omega t} \sum_n \frac{\psi_n(\bar r)\psi_n^*(\bar r')}{\omega-\omega_n+i\varepsilon} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} dE \, e^{-\frac{iEt}{\hbar}} \underbrace{\sum_n \frac{\psi_n(\bar r)\psi_n^*(\bar r')}{E-E_n+i\varepsilon}}_{G_E^+(\bar r, \bar r')}$$

opóźniona retardowana f. Greena

zauważmy że:

$$(E - \hat H + i\varepsilon) G_E^+(\bar r, \bar r') = \sum_n \frac{E-E_n+i\varepsilon}{E-E_n+i\varepsilon}\psi_n(\bar r)\psi_n^*(\bar r') = \delta^3(\bar r - \bar r')$$

czyli zwięźle:

$$(E - \hat H + i\varepsilon) G_E^+ = \mathbb{1}$$

$G^+ = (E - \hat H + i\varepsilon)^{-1}$ { dla odwracanego ...

$$G_E^{+} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(E-\hat{H}+i\varepsilon\right)^{-1}$$

[illegible] mielibyśmy $-i\varepsilon$

2. Na wykładzie pojawiło się równanie Lipmana Schwingera

$|\psi_{in}\rangle$ – stan padający $\quad (E-H_0)|\psi_0\rangle = 0$

$$|\psi\rangle = |\psi_{in}\rangle + (E-H_0)^{-1}V|\psi\rangle$$

↓ spełnia równ. Schrödingera

$$(E-H_0)|\psi\rangle = V|\psi\rangle \quad \text{ok.}$$

czyli:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{1-\underbrace{(E-H_0)^{-1}}_{G_{0,E}}V}|\psi_{in}\rangle$$

↳ funkcja Greena H_0

Żebyśmy mogli interpretować $|\psi_0\rangle$ jako falę padającą trzeba wziąć retardowaną f. Greena

$$|\psi\rangle = \frac{1}{1-G^{+}_{0,E}V}|\psi_{in}\rangle$$

E – energia fali padającej

formalnie.

$$|\psi\rangle = (1+G_0V+G_0VG_0V\dots)|\psi_0\rangle =$$

$$= |\psi_{in}\rangle + \underbrace{G_0(V+VG_0V+\dots)|\psi_{in}\rangle}_{|\psi_{out}\rangle}$$

$$|\psi_{out}\rangle = G_0T\,|\psi_{in}\rangle$$

$$T = V(1 - G_0 V)^{-1} = (1 - V G_0)^{-1} V$$

Σ macierz T

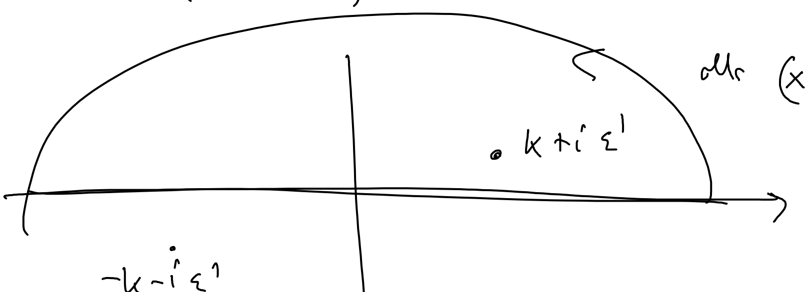
Znajdźmy macierz T dla rozpraszania cząstki w 1D na potencjale $V(x) = g\,\delta(x)$

Najpierw szukamy G_0^+

$$G_0^+(x,x') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{E - \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} + i\varepsilon} = \qquad \left\{ \psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \right. \qquad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

$$= -\frac{m}{\pi\hbar^2}\int dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{k'^2 - k^2 - i\varepsilon} = -\frac{m}{\pi\hbar^2}\int dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{\left(k' - \sqrt{k^2 + i\varepsilon}\right)\left(k' + \sqrt{k^2 + i\varepsilon}\right)}$$

$$= -\frac{m}{\pi\hbar^2}\int dk' \frac{e^{ik'(x-x')}}{(k' - k - i\varepsilon')(k' + k + i\varepsilon')}$$



dla $(x - x') > 0$

$$G_0^+(x,x') = -\frac{m}{\pi\hbar^2}\,\frac{e^{i(k+i\varepsilon)(x-x')}}{2k + 2i\varepsilon'} =$$

$$= -\frac{mi}{\hbar^2}\,\frac{e^{ik(x-x')}}{k}$$

dla $(x - x') < 0$ $\quad = -\frac{mi}{\hbar^2}\,\frac{e^{-ik(x-x')}}{k}$

$$\underbrace{G_0^+ = -\frac{im}{\hbar^2 k} e^{ik|x-x'|}}$$

↳ widać że „prąd" płynie z x' do x

$$V(x,x') = g\,\delta(x)\,\delta(x')$$

$$T = V + VG_0V + VG_0VG_0V + \dots$$

$$T(x,x') = g\,\delta(x)\delta(x') + g^2\,\delta(x)\left(-\frac{im}{\hbar^2 k}\right) e^{ik|x-x'|}\,\delta(x')$$

$$+ g^3\,\delta(x)\left(-\frac{im}{\hbar^2 k}\right) e^{ik|x-x''|}\,\delta(x'')\left(-\frac{im}{\hbar^2 k}\right) e^{ik|x''-x'|}\,\delta(x') + \dots$$

$$= g\,\delta(x)\,\delta(x')\left[1 + \left(-\frac{img}{\hbar^2 k}\right) + \left(\quad\right)^2 + \dots\right)$$

$$= g\,\delta(x)\delta(x')\,\frac{1}{1+\frac{img}{\hbar^2 k}}$$

Weźmy teraz $\psi_{in}(x) = e^{ikx}$: :

$$\psi_{out}(x) = \int dx'\,dx''\,G(x,x')\,T(x',x'')\,\psi_{in}(x'')$$

$$= -\frac{im}{\hbar^2 k}\cdot\frac{g}{1+\frac{img}{\hbar^2 k}}\,e^{ik|x|} = -\frac{e^{ik|x|}}{1-\frac{i\hbar^2 k}{mg}}$$

$$\left\{ a = \frac{\hbar^2}{mg} \right. \qquad \psi_{out}(x) = -\frac{e^{ik|x|}}{1-ika}$$

Czyli pełne rozwiązanie

$$\psi(x) = e^{ikx} - \frac{e^{ik|x|}}{\dots}$$

$\psi(x) = e \qquad 1 - ika$

dla $x > 0$

$$\psi(x) = e^{ikx}\left(1 - \frac{1}{1-ika}\right) = e^{ikx}\left(\frac{-ika}{1-ika}\right)$$

czyli współczynnik transmisji

$$T = \frac{(ka)^2}{1+(ka)^2}$$

dla $x < 0$

$$\psi(x) = \underset{\text{fala padająca}}{e^{ikx}} - \underbrace{\frac{e^{-ikx}}{1-ika}}_{\text{fala odbita}}$$

$$R = \frac{1}{1+(ka)^2} \qquad T + R = 1 \quad \text{ok.}$$