Cwiczenia 9

13 marca 2014
15:16

Oscylator harmoniczny przez szereg

Oscylator Harmoniczny

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi$$

Szukamy stanów własnych i energ. własnych

Przejdźmy do zmiennych bezwymiarowych

$$\xi = \alpha \cdot x$$

$$-\alpha^2\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \psi\left(\frac{1}{2}k\frac{\xi^2}{\alpha^2} - E\right) = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \psi\left(\frac{2mE}{\hbar^2\alpha^2} - \frac{km}{\hbar^2\alpha^4}\xi^2\right) = 0$$

$$\alpha^4 = \frac{km}{\hbar^2} \qquad \alpha^2 = \frac{\sqrt{km}}{\hbar} = \frac{\omega m}{\hbar} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\sqrt{k} = \omega \cdot \sqrt{m}$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \psi\left(\underbrace{\frac{2E}{\hbar}\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}}_{\lambda} - \xi^2\right) = 0$$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \psi(\lambda - \xi^2) = 0$$

Potrzymy w granicy $\xi \to \pm\infty$

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \xi^2\psi$$

$$\psi = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\frac{d\psi}{d\xi} = e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2}(-\xi)$$

$$\frac{d^2\psi}{} = \xi^2 e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} - e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} \approx \xi^2 e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\left\{ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \xi^2 e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} \underbrace{\pm e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2}} \approx \xi^2 e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} \right.$$

Ogólniej $\psi = \xi^n e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2}$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\psi}{d\xi} &= n\xi^{n-1} e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} + \xi^n e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2}(\pm\xi) \\ \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= n(n-1)\xi^{n-2} e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} + n\xi^{n-1} e^{-\frac{1}{2}\xi^2}(\pm\xi) \\ &\quad \pm (n+1)\xi^n e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + \xi^{n+2} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \approx \\ &\approx \xi^{n+2} e^{\pm\frac{1}{2}\xi^2} \end{aligned} \right.$$

Odrzucamy $e^{+\frac{1}{2}\xi^2}$ i szukamy:

$$\psi = H(\xi)\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

Wielomian skończonego rzędu

$$\psi' = H' e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - \xi H e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$\psi'' = H'' e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - 2\xi H' e^{-\frac{1}{2}\xi^2} - H e^{-\frac{1}{2}\xi^2} + \xi^2 H e^{-\frac{1}{2}\xi^2}$$

$$H'' - 2\xi H' - H + \cancel{\xi^2} H + H(\lambda - \cancel{\xi^2}) = 0$$

$$H'' - 2\xi H' + H(\lambda - 1) = 0$$

Szukamy rozwiązań postaci

$$H = \xi^s (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots) \qquad a_0 \neq 0$$

$$H' = s\xi^{s-1}(a_0 + \ldots) + \xi^s(a_1 + 2\xi a_2 + 3\xi^2 a_3 + \ldots) =$$

$$= \xi^{s-1}(s a_0 + s a_1 \xi + s a_2 \xi^2 + \xi a_1 + 2\xi^2 a_2 + \ldots) =$$

$$= \xi^{s-1}(s a_0 + a_1\xi(s+1) + a_2\xi^2(s+2) + a_3\xi^3(s+3) \ldots)$$

$H'' \ldots \xi^{s-2} \ldots$

$$H'' = (s-1)\zeta^{s-2}(\;....\;) + \zeta^{s-1}\cdot\left(a_1(s+1) + 2a_2\zeta(s+2) + 3a_3\zeta^2(s+3)\ldots\right) =$$

$$= \zeta^{s-2}\cdot\Big(s(s-1)a_0 + a_1\zeta\big[(s+1)s\big] + a_2\,\zeta^2(s+2)(s+1) + a_3\,\zeta^3\left(s+3\right)(s+2) + \ldots\Big)$$

Patrzymy na kolejne potęgi ζ

ζ^{s-2}: $\quad s(s-1)\,a_0 = 0$

ζ^{s-1}: $\quad (s+1)s\;a_1 = 0$

ζ^{s}: $\quad a_2(s+2)(s+1) - 2sa_0 + a_0(\lambda-1)$

$\quad a_2(s+2)(s+1) - a_0(2s+1-\lambda) = 0$

ζ^{s+1} $\quad a_3(s+3)(s+2) - 2a_1(s+1) + a_1(\lambda-1)$

$\quad a_3(s+3)(s+2) - a_1(2s+3-\lambda) = 0$

$\vdots$

$\nu = 0, \ldots,$ $\quad a_{\nu+2}(s+\nu+2)(s+\nu+1) - a_\nu(2s+2\nu+1-\lambda) = 0$

Z pierwszego: $\quad s=0 \lor s=1$

drugie: $\quad s=0 \lor a_1=0$

Następne: $\quad \dfrac{a_{\nu+2}}{a_\nu} = \dfrac{2s+2\nu+1-\lambda}{(s+\nu+2)(s+\nu+1)}$

Stany własne w tym potencjale albo parzyste albo nieparzyste. To oznacza że $a_1, a_3, \ldots$ muszą znikać.

Dla $s=0$ f. parzysta

$s=1$ f. nieparzysta

Asymptotycznie:

$$\frac{a_{\nu+2}}{a_\nu} \xrightarrow{\nu\to\infty} \frac{2}{\nu}$$

Nie może tak być w ∞ bo szereg nie zbiega:

$\left(\text{tc} \quad e^{+\xi^2} = \sum_n \frac{(\xi^2)^n}{n!} \right)$

Szereg musi więc być skończony

To oznacza że:

$$\lambda = 2s + 2\nu + 1$$ gdzie ν – parzyste ($s=0$ lub $s=1$)

Czyli

$$\lambda = 2n+1$$ ($n = s+\nu$ – najwyższe występujące w szeregu)

Czyli energia:

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2E}{\hbar\omega} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2}\cdot(2n+1) = \hbar\omega\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right) \qquad n = 0,\dots,$$

Odstępy energii $\hbar\omega$. Energia drgań zerowych $\frac{\hbar\omega}{2}$

Odpowiadające n wielomiany:

$H_n(\xi)$ – Wielomian Hermita

H_n – parzyste lub nieparzyste w zależności od parzystości n

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2n H_n = 0$$

Badanie własności H_n wygodnie jest robić

Badanie własności H_n wygodne jest robić używając funkcji tworzącej czyli takiej że:

$$S(\eta, s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(\eta)}{n!} s^n$$

$$H_n(\eta) = \left.\frac{\partial^n S}{\partial^n s}\right|_{s=0}$$

Sprawdźmy, że:

$$S(\eta, s) = e^{-s^2+2s\eta}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = 2s\, e^{-s^2+2s\eta} = \sum_n \frac{2s^{n+1}}{n!} H_n(\eta) =$$

$$= \sum_n \frac{s^n}{n!} H_n'(\eta)$$

- $H_n' = 2nH_{n-1}$

$$\frac{\partial S}{\partial s} = (-2s+2\eta)\, e^{-s^2+2s\eta} = \sum_n \frac{(-2s+2\eta)s^n}{n!} H_n(\eta) =$$

$$= \sum_n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} H_n(\eta)$$

$$\vee$$

- $H_{n+1} = 2\eta H_n - 2nH_{n-1}$

$$2\eta H_n = \frac{2\eta (H_{n+1}')}{2(n+1)}, \qquad 2nH_{n-1} = H_n' = \frac{H_{n+1}''}{2(n+1)}$$

$$2(n+1) H_{n+1} - 2\eta H_{n+1}' + H_{n+1}'' = 0$$

$$\therefore$$

$$H_n'' - 2\eta H_n' + 2nH_n = 0 \qquad \text{ok}$$

Możemy liczyć H_n korzystając z S.

$$H_n(\xi) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{-s^2+2s\xi}\Big|_{s=0}$$

Wygodniej:

$$H_n(\xi) = \frac{\partial^n}{\partial s^n} e^{\xi^2-(\xi-s)^2}\Big|_{s=0} =$$

$$\boxed{= e^{\xi^2}(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} e^{-\xi^2}}$$

$$H_0 = 1$$

$$H_1 = e^{\xi^2}(-1)(-2\xi)e^{-\xi^2} = 2\xi$$

$$H_2 = e^{\xi^2}\cdot\left(\frac{d}{d\xi}\, -2\xi e^{-\xi^2}\right) = e^{\xi^2}\cdot\left(-2e^{-\xi^2} + 4\xi^2 e^{-\xi^2}\right) =$$

$$= 4\xi^2 - 2$$

$$\vdots$$

Funkcje własne:

$$\psi_n(x) = A_n\, H_n(\alpha \cdot x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2}$$

Wyznaczmy stałą normalizacyjną:

$$\frac{|A_n|^2}{\alpha}\cdot \int d\xi\, H_n^2(\xi)\, e^{-\xi^2} = ?$$

Weźmy całkę z iloczynu dwóch funkcji tworzących

$$\int S(\xi, s)\, S(\xi, t)\, e^{-\xi^2} =$$

$$= \int d\xi \sum_{n,m} \frac{H_n(\xi)}{n!} s^n \frac{H_m(\xi)}{m!} t^m e^{-\xi^2}$$

Nas interesują wyrazy stojące przy $\frac{s^n t^n}{(n!)^2}$

$$\int H_n^2(\xi)\, e^{-\xi^2} = \frac{\partial^n}{\partial s^n} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \underbrace{\int S(\xi,s)\, S(\xi,t)\, e^{-\xi^2} d\xi}_{B} \Big|_{\substack{s=0 \\ t=0}}$$

$$B = \int e^{-s^2 + 2s\xi - t^2 + 2t\xi - \xi^2} d\xi =$$

$$= e^{2st} \int e^{-(\xi - (s+t))^2} = \sqrt{\pi}\, e^{2st}$$

$$\int H_n^2(\xi)\, e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}\, 2^n n!$$

Od razu też widać że

$$\int H_n H_m e^{-\xi^2} = 0 \quad \text{dla } n \neq m$$

$$A_n = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}$$

$$\boxed{\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}\, 2^n n!}}\; H_n(\alpha x)\, e^{-\frac{1}{2}\alpha x^2}}$$

$$\alpha^2 = \frac{\sqrt{km}}{\hbar} = \frac{m\omega}{\hbar}$$

Wartości oczekiwane

$$\langle \psi_n | x | \psi_n \rangle = \frac{|A_n|^2}{\alpha^2} \int d\xi\, H_n^2(\xi)\, \underbrace{\xi}_{\text{nieparzyste}}\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2} = 0$$

$$\Delta^2 x = \langle x^2 \rangle =$$

$$= \frac{|A_n|^2}{\alpha^3} \int d\xi \quad H_n^2(\xi)\, \xi^2 e^{-\xi^2}$$

$$\int S(\xi, s)\, S(\xi, t)\, \xi^2 e^{-\xi^2} =$$

i patrzymy na wyraz stojący przy $\frac{s^n t^n}{(n!)^2}$

$$= e^{2st} \int d\xi\, \xi^2 e^{-(\xi - (s+t))^2}$$

$$\int dx\, x^2 e^{-(x-a)^2} = \int dx' (x+a)^2 e^{-x^2} =$$

$$= \int dx \left(x^2 + a^2\right) e^{-x^2} =$$

$$= \sqrt{\pi}\, a^2 + \int x^2 e^{-x^2} = \sqrt{\pi}\, a^2 - \frac{d}{dt}\sqrt{\frac{\pi}{t}} =$$

$$- \frac{d}{dt} \int e^{-tx^2} \Big|_{t=1}$$

$$= \sqrt{\pi}\, a^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\left(a^2 + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \sqrt{\pi}\, e^{2st} \cdot \left((s+t)^2 + \frac{1}{2} \right)$$

Przy $s^n t^n$ stoi :

$$\sqrt{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2}\frac{2^n}{n!}+2\cdot\frac{2^{n-1}}{(n-1)!}\right)=\frac{1}{n!^2}\cdot\sqrt{\pi}\cdot 2^n\cdot\left(\frac{1}{2}n!+n n!\right)$$

$$\Delta x^2=\frac{|A_n|^2}{\alpha^3}\cdot\sqrt{\pi}\,2^n n!\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\alpha^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Kolejne stany coraz bardziej rozmyte przestrzennie.

Oscylator harm. w reprezentacji pędowej

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)+\frac{1}{2}kx^2\psi(x)=E\psi(x)$$

Podziałajmy stronami:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{-\frac{ipx}{\hbar}}dx$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{-\frac{ipx}{\hbar}}\frac{d^2}{dx^2}\psi(x)dx+\frac{1}{2}k\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int e^{-\frac{ipx}{\hbar}}x^2\psi(x)=E\psi(p)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\frac{ip}{\hbar}\right)^2\psi(p)+\frac{1}{2}k\left(-\frac{\hbar}{i}\right)^2\frac{d^2}{dp^2}\psi(p)=E\psi(p)$$

$$-\frac{\hbar^2 k}{2}\frac{d^2\psi(p)}{dp^2}+\frac{p^2}{2m}\psi(p)=E\psi(p)$$

$m \leftrightarrow \frac{1}{k}$ i wszystko jest tak samo jak w rep. przestrzennej

$$\alpha^2=\frac{\sqrt{km}}{\hbar}\longrightarrow\beta^2=\frac{1}{\sqrt{km}\,\hbar}$$

$$\Delta p^2 = \frac{1}{\beta^2}\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Delta x^2 \Delta p^2 = \frac{\hbar}{\sqrt{km}} \sqrt{km}\,\hbar \left(n+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\Delta x \Delta p = \hbar\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

Widzimy, że tylko stan podstawowy wysyca zasadę nieoznaczoności.