Mechanika Kwantowa R 2014/2015, Seria 1

Zadanie 1 Czastka o spinie $\frac{1}{2}$ znajduje sie poczatkowo w stanie $|+\rangle_z$. W chwili $t = 0$ zostal „wlaczony" nastepujacy ciag Hamiltonianów: $\hat{H}_1 = \mu\sigma_x$ dla $t \in (0, \frac{\pi\hbar}{2\mu})$, $\hat{H}_2 = \mu\sigma_y$ dla $t \in (\frac{\pi\hbar}{2\mu}, \frac{\pi\mu}{\hbar})$ oraz $\hat{H}_3 = \mu\sigma_z$ dla $t \in (\frac{\pi\hbar}{\mu}, \frac{3\pi\hbar}{2\mu})$. Wyznacz prawdopodobienstwo, ze w chwili $t = \frac{3\pi\hbar}{2\mu}$ spinu byl nadal w stanie $|+\rangle_z$. Wyznacz pojedynczy Hamiltonian niezalezny od czasu i taki, ze jego dzialanie na czastke w przedziale czasowym $t \in (0, \frac{3\pi\hbar}{2\mu})$ doprowadzilby ja do tego samego stanu koncowego, co ciag Hamiltonianów $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$, $\hat{H}_3$.

Zadanie 2 Na ćwiczeniach omawiany był eksperyment z kwantowym wykrywaniem bomby przy pomocy interfereomtru Macha-Zehndera, gdzie można było z prawdopodobieństwem 1/4 wykryć bombę (która wybucha przy kontakcie z pojedynczym fotonem) bez powodowania wybuchu. Sformułuj równoważny schemat dla wariantu spinowego: bomba wybucha gdy wejdzie w kontakt ze stanem cząstki o spinie 1/2 której rzut spinu na oś z jest $-\hbar/2$ (w dół); wyobrażamy sobie, że mamy cząstkę o spinie 1/2: możemy ją dowolnie ewoluować i kiedy chcemy umieszczamy ją w miejscu podejrzanym o istnienie w nim bomby. Czy można ten schemat usprawnić, tak żeby prawdopodobieństwo sukcesu (czyli wykrycie bomby lub stwierdzenie jej nieobecności, nie powodując przy tym wybuchu) było dowolnie bliskie 1. Wskazówka: pomyśl o efekcie Zenona...

Zadanie 3 Analizując wyprowadzenie zasady nieoznaczoności Heisenberga, wykaż że stany Gaussowskie są to jedyne stany dla których zasada nieoznaczoności dla położenia-pędu jest wysycana.

Zadanie 4 Rozważ cząstkę umieszczoną w nieskończonej studni potencjału

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} - a \leq x \leq a \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \tag{1}$$

przygotowaną w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi(x) = \begin{cases} A(x+a)(a-x) & \text{dla } \; - a \leq x \leq a \\ 0 & \text{w pozostałcyh przypadkach} \end{cases}. \tag{2}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Oblicz $\Delta^2 x$, $\Delta^2 p$ i sprawdź spełnienie zasady nieoznaczoności Heisenberga

c) Na cząstce dokonano pomiaru energii. Jakie wartości pomiaru energii są możliwe i jakie są odpowiadające im prawdopodobieństwa

d) Oblicz wartość oczekiwaną energii korzystając z wyniku poprzedniego podpunktu. Wyznacz również wartość oczekiwaną energii niezależnie licząc $\langle\psi|H|\psi\rangle$. Jak bardzo wartość oczekiwana różni się od energii stanu podstawowego?

Zadanie 5 Cząstka o masie m znajduje sie w nieskończonej jednowymiarowej studni potencjału rozciągającej sie od 0 do a. Wiadomo, ze w chwili $t = 0$ cząstka znajdowała się w stanie podstawowym.Nagle szerokość studni została podwojona (z a do $2a$) tak, że w momencie poszerzania studni funkcja falowa cząstki nie zmieniła się.

a) Jakie jest prawdopodobieństwo zmierzenia cząstki w pierwszym stanie wzbudzonym nowej studni?

b) Napisz wyrażenie na funkcję falową cząstki po czasie t od momentu poszerzenia studni $\psi(x, t)$

c) Oblicz średnią energię cząstki przed i po podwojeniu szerokości studni.

Zadanie 6 Zapisz w reprezentacji pędowej stany o określonej energii cząstki o masie m umieszczonej w nieskończonej studni potencjału o szerokości a. Dla n-go stanu własnego zapisz wyrażenie na gęstość prawdopodobieństwa pędu cząstki.

Zadanie 7 Pokazać, że jeśli funkcje $A(x, p)$ i $B(x, p)$ mogą być zapisane jako szeregi potęgowe w x i p to $\lim_{\hbar\to 0} \frac{1}{i\hbar}[A, B] = \{A, B\}$

Zadanie 8 Rozważ gausowską funkcję falową w jednym wymiarze:

$$|\psi\rangle(x) = A \exp\left(-\frac{x^2}{4\Delta^2 x} + \frac{\mathrm{i}\langle p\rangle x}{\hbar}\right) \tag{3}$$

a) Wyznacz wartość stałej normalizacyjnej A

b) Napisz i zinterpretuj wyrażenie na prąd prawdopodobieństwa

Zadanie 9 Czy istnieje potencjał $V(x)$ taki, ze umieszczona w nim cząstka o funkcji falowej $\psi(x) = Ne^{-x^2/\sigma^2}$ pozostanie w niezmienionym stanie (z dokładnością do fazy)? Jeśli tak - podaj przykład, jeśli nie - uzasadnij dlaczego.

Zadanie 10 Znajdź stany własne i poziomy energetyczne w nieskończonej studni potencjału o szerokości a w środku której dodatkowo znajduje się potencjał typu delty Diraca:

$$V(x) = \begin{cases} \lambda\delta(x) & \text{dla} - a/2 \le x \le a/2 \\ \infty & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}, \tag{4}$$

Przedyskutuj wynik w zależności o znaku parametru λ.

Zadanie 11 Wyznacz zbiór parametrów a i V_0, dla których istnieja stany zwiazane czastki o masie m w jednym wymiarze w polu sil o potencjale $V(x) = \begin{cases} \infty & \text{dla } x < 0 \\ -V_0 & \text{dla } 0 < x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases}$.

Zadanie 12 Rozwaz prostokatna studnie potencjalu o glebokosci V_0 i szerokosci $2a$ (na zewnatrz studni $V(x) = 0$ dla $|x| > a$, $V(x) = -V_0$ dla $|x| < a$). Czy i dla jakich parametrów studni istnieje rozwiazanie dla czastki o masie m i zerowej energii?

Zadanie 13 Wyznacz współczynnik transmisji i odbicia fali płaskiej przy rozpraszaniu na potencjale:

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{dla } x < 0 \\ -V_1 & \text{dla } 0 < x < a \\ 0 & \text{dla } x > a \end{cases} \tag{5}$$

Uwaga: pamiętaj, że współczynniki transmisji/odbicia są związane ze stosunkami prądów prawdopodobieństwa związanych z odpowiednimi falami.

Zadanie 14 Wyprowadź metodą całek po trajektoriach propagator dla cząstki o masie m w potencjale liniowym $V = -Fx$. Czy udałoby Ci się otrzymać ten sam wynik biorąc ogólny wzór na propagator i wstawiając od niego funkcje falowe stanów własnych dla potencjału liniowego (funkcje Airy'ego). Użyj teraz tego propagatora aby zbadać problem rozmywania się paczki gaussowskiej $\psi(x) = e^{-x^2/4\sigma^2}/(2\pi\sigma^2)^{1/4}$ w potencjale liniowym (czyli podanie zależności wariancji położenia cząstki od czasu). Porównaj trudność uzyskania końcowego wyniku w ten sposób z trudnością uzyskania tego samego wyniku korzystając z obrazu Heisenberga?

Zadanie 15 Stosując metodę WKB znajdź energię stanów własnych w potencjale: $V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$
Następnie korzystając ze swojej znajomości ścisłych rozwiązań w potencjale liniowym, porównaj uzyskane wyniki z wynikiem ścisłym. Wskazówka: porównanie wymaga numerycznych wartości zer funkcji Airy'ego...

Zadanie 16 Rozwaz czastke o spinie $\frac{1}{2}$ skierowanym wzdluz osi z. Wyznacz amplitude prawdopodobienstwa przejscia tej czastki przez urzadzenie Sterna-Gerlacha ustawione pod katem α do osi z. Przedyskutuj przypadek $\alpha = 2\pi$. Zaproponuj eksperyment, który móglby zweryfikowac poprawnosc uzyskanego wyniku [Tylko dr hab. Dragan zna odpowiedź na to pytanie...].