

Mechanika Kwantowa R 2014/2015, Seria 3

Zadanie 1 Cząstka o masie m znajdująca się w stanie podstawowym trójwymiarowego, izotropowego oscylatora harmonicznego o częstości ω począwszy od chwili $t = 0$ jest poddana potencjałowi zaburzającemu $V'(t) = ax \cos(\omega t)$. Oszacuj w pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń prawdopodobieństwo w chwili t znalezienia cząstki w stanie innym niż stan podstawowy.

Zadanie 2 Znajdź energie własne i odpowiadające im stany spinowe dla układu proton-antyproton. Przyjmujemy, że cząstki są nieruchome i znajdują się w ustalonej odległości od siebie a ich oddziaływanie opisuje hamiltonian:

$$H = g \left[\vec{\mu}_1 \cdot \vec{\mu}_2 - \frac{3(\vec{\mu}_1 \cdot \vec{r})(\vec{\mu}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right]$$

w którym g jest stałą, a $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2$ są odpowiednio momentami magnetycznymi protonu i antyprotonu.

Zadanie 3 Rozważ układ dwóch cząstek A i B każda o spinie $1/2$ przygotowanych w stanie dla którego wartość całkowitego spinu jest zero.

- Zakładając, że na cząstce B nie jest wykonywany żaden pomiar, jakie jest prawdopodobieństwo, że mierząc składową z spinu cząstki A otrzymamy wynik $+\hbar/2$.
- Powtórz powyższy punkt przyjmując, że na cząstce B została wcześniej zmierzona wartość składowej z spinu równa $+\hbar/2$.

Zadanie 4 Rozważ dwie cząstki o spinie $1/2$, które w chwili $t = 0$ zostały przygotowane w stanie $|s_{1,z} = +\hbar/2\rangle \otimes |s_{2,z} = +\hbar/2\rangle$. Następnie cząstki ewoluują pod wpływem Hamiltonianu:

$$H = \frac{4\Delta}{\hbar^2} \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2.$$

- Znajdź stan cząstek w chwili t
- Rozwiąż ten problem stosując rachunek zaburzeń zależny od czasu w pierwszym rzędzie, przyjmując że zaburzenie w postaci H zostało włączono w chwili $t = 0$. Porównaj z rozwiązaniem ścisłym.

Zadanie 5 Cząstka o ładunku q i masie m porusza się w polu magnetycznym $\vec{B} = B\hat{e}_z$. Zapisz równania Heisenberga na ewolucji obserwabli, które odpowiadają składowym prędkości cząstki $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Zinterpretuj porównując z klasycznym ruchem cząstki w polu magnetycznym.

Zadanie 6 Rozważ przejście w atomie wodoru z poziomu $n = 4, l = 3, j = 3/2$ do $n = 4, l = 2, j = 5/2$. W nieobecności zewnętrznego pola magnetycznego w widmie atomu będziemy obserwować jedną linię związaną z tym przejściem. Opisz jak rozszepi się ta linia po umieszczeniu atomu w polu magnetycznym w związku z efektem Zeemana.

Zadanie 7 Rozważ kwantowy układ dwupoziomowy S , o wektorach bazowych $|0\rangle_S, |1\rangle_S$, oraz otoczenie E będące również układem dwupoziomowym przygotowanym w chwili początkowej w stanie $|0\rangle_E$. Efekt oddziaływania układu z otoczeniem reprezentuje ewolucja unitarna, której działanie na wektory bazowe $|i\rangle_S \otimes |0\rangle_E$ ma postać:

$$U|0\rangle_S \otimes |0\rangle_E = |0\rangle_S \otimes |1\rangle_S U|1\rangle_S \otimes |0\rangle_E = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S \otimes |1\rangle_E + |1\rangle_S \otimes |0\rangle_E).$$

Założmy, że w chwili początkowej stan układu i otoczenia jest postaci:

$$|\Psi\rangle_{SE} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_S + e^{i\varphi}|1\rangle_S) \otimes |0\rangle_E,$$

gdzie φ jest dowolną fazą

- Znajdź końcowy stan $|\Psi'\rangle_{SE}$ powstający w wyniku zadziałania operacją U na stan $|\Psi\rangle_{SE}$.
- Znajdź zredukowaną macierz gęstości układu S po oddziaływaniu z otoczeniem
- Postaraj się wymyślić jakąś miarę „dekoherencji” stanu S i odpowiedz na pytanie czy stopień dekoherencji stanu układu S zależy od wartości parametru φ .

Zadanie 8 Cząstka o masie m ulega rozproszeniu na płytym potencjale gaussowskim:

$$V(r) = V_0 e^{-r^2/a^2},$$

gdzie α jest stałą określającą zasięg potencjału. Oblicz amplitudę rozpraszania $f(\theta)$ i różniczkowy przekrój czynny w przybliżeniu Borna. Pokaż, że w granicy fal długich (powolne cząstki) przekrój czynny jest izotropowy w przestrzeni i oblicz całkowity przekrój czynny w tej granicy. Izotropowość różniczkowego przekroju czynnego wskazuje na dominującą rolę fali s w rozpraszaniu. Porównaj uzyskaną wartość przekroju czynnego, z przekrojem czynnym klasycznej cząstki punktowej rozpraszającej się na sztywnej kuli o promieniu α .

Zadanie 9 Rozważ cząstkę o masie m i ładunku e rozpraszającą na dipolu, składającym się z ładunków e i $-e$ odległych od siebie o $2a$, o kierunku prostopadłym do kierunku cząstki padającej. W przybliżeniu Borna wyznacz różniczkowy przekrój czynny dla takiego rozpraszania. W jakich kierunkach różniczkowy przekrój czynny będzie największy?

Zadanie 10 Rozważ sferycznie symetryczny potencjał:

$$V(r) = \begin{cases} 0 & , \text{dla } r \geq R \\ V_0 & , \text{dla } r < R \end{cases}$$

Stosując metodę fal parcjalnych pokaż, że w granicy $|V_0| \ll E = \hbar k^2/2m$, $kR \ll 1$ różniczkowy przekrój czynny jest izotropowy a całkowity przekrój czynny ma postać:

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{16\pi}{9} \frac{m^2 V_0^2 R^6}{\hbar^4}$$