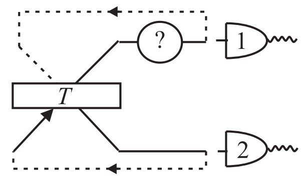
Mechanika Kwantowa R 2016/2017, Seria 1

Zadanie 1 Na zajęciach omówiliśmy prosty przykład „kwantowego sapera” gdzie z prawdopodobieństwem 1/4 byliśmy w stanie stwierdzić obecność superczułej bomby bez powodowania jej wybuchu. Rozważ następujące uogólnienie tego protokołu, zilustrowane na poniższym schemacie:



w którym foton wpuszczany jest początkowo do dolnego portu, płytka światłodzieląca ma transmisję T a detekcja następuje dopiero po N cyklach przepuszczenia światła przez układ. Jak zaprojektować eksperyment aby móc wykrywać bombę bez powodowania jej wybuchu z prawdopodobieństwem dowolnie bliskim 1. *Wskazówka:* Przyjmij, że działanie płytki światłodzielącej odpowiada następującej macierzy:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta/2 & \sin\theta/2 \\ -\sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{bmatrix}$$

gdzie współczynnik transmisji $T = \sin^2\theta/2$ powinien być mały, aby protokół miał sens.

Zadanie 2 Znając, stany spinu 1/2 odpowiadające określonym rzutom spinu na osie x, y, z, udowodnij, że stan cząstki o spinie 1/2 odpowiadający określonemu rzutowi spinu na oś $\vec{n} = [\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta]$ wynoszącemu $+\hbar/2$ powinien mieć postać:

$$|+\rangle_{\vec{n}} = \cos(\theta/2)|+\rangle_z + \sin(\theta/2)e^{i\varphi}|-\rangle_z.$$

Wskazówka: Użyj argumentu, że taki stan w wielokrotnie powtarzanych pomiarach rzutu spinu np. na oś x powinien średnio dać wyniki $n_x\hbar/2$ (i podobnie dla innych osi y,z) tak abyśmy mieli zgodność z wynikiem klasycznym, w którym mierzylibyśmy po prostu odpowiednią składową spinu. Mając postać tego stanu wykaż, że obserwabla spinu odpowiadająca pomiarowi rzutu spinu na oś $\vec{n}$ ma postać: $\sigma_{\vec{n}} = \vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z$.

Zadanie 3 Czastka o spinie $\frac{1}{2}$ znajduje sie początkowo w stanie $|+\rangle_z$. W chwili $t = 0$ został „właczony” następujacy ciąg Hamiltonianów: $\hat{H}_1 = \mu\sigma_x$ dla $t \in (0, \frac{\pi\hbar}{4\mu})$, $\hat{H}_2 = \mu\sigma_y$ dla $t \in (\frac{\pi\hbar}{4\mu}, \frac{\pi\mu}{2\hbar})$ oraz $\hat{H}_3 = \mu\sigma_z$ dla $t \in (\frac{\pi\hbar}{2\mu}, \frac{3\pi\hbar}{4\mu})$. Wyznacz prawdopodobieństwo, że w chwili $t = \frac{3\pi\hbar}{2\mu}$ spin był nadal w stanie $|+\rangle_z$. Wyznacz pojedynczy Hamiltonian niezależny od czasu i taki, ze jego działanie na cząstkę w przedziale czasowym $t \in (0, \frac{3\pi\hbar}{4\mu})$ doprowadziłby ją do tego samego stanu końcowego, co ciąg Hamiltonianów $\hat{H}_1$, $\hat{H}_2$, $\hat{H}_3$.

Przy okazji na podstawie powyższych rachunków przekonaj się, że operacja unitarna na spinie odpowiadająca obrotowi spinu w przestrzeni o kąt φ wokół osi $\vec{n}$ ma postać $U_{\varphi,\vec{n}} = e^{i\varphi\vec{n}\cdot\vec{\sigma}/2}$. Zapisz, powyższą operację dla $\varphi = 2\pi$. Czy U jest macierzą jednostkową? Co o tym sądzisz?

Zadanie 4 Na ćwiczeniach omawiany był eksperyment z kwantowym wykrywaniem bomby przy pomocy interfereomtru Macha-Zehndera, gdzie można było z prawdopodobieństwem 1/4 wykryć bombę (która wybucha przy kontakcie z pojedynczym fotonem) bez powodowania wybuchu. Sformułuj równoważny schemat dla wariantu spinowego: bomba wybucha gdy wejdzie w kontakt ze stanem cząstki o spinie 1/2 której rzut spinu na oś z jest $-\hbar/2$ (w dół); wyobrażamy sobie, że mamy cząstkę o spinie 1/2: możemy ją dowolnie ewoluować i kiedy chcemy umieszczamy ją w miejscu podejrzanym o istnienie w nim bomby. Czy można ten schemat usprawnić, tak żeby prawdopodobieństwo sukcesu (czyli wykrycie bomby lub stwierdzenie jej nieobecności, nie powodując przy tym wybuchu) było dowolnie bliskie 1. Wskazówka: pomyśl o efekcie Zenona...

Zadanie 5 Rozważ atom dwupoziomowy, gdzie $|0\rangle$, $|1\rangle$ są stanami o określonej energii wynoszącej odpowiednio E i $2E$. Niech stan atomu w chwili początkowej będzie postaci: $|\psi(0)\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$.

a) Znajdź postać stanu w chwili t

b) Po czasie t dokonano pomiaru cząstki, w którym rzutowano stan cząstki na stan początkowy $|\psi(0)\rangle$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że istotnie zmierzono stan $|\psi(0)\rangle$

Zadanie 6 Rozważ atom dwupoziomowy gdzie Hamiltonian zapisany w bazie $|0\rangle$, $|1\rangle$ ma postać:

$$H = \begin{pmatrix} E & g \\ g & E \end{pmatrix} \tag{1}$$

gdzie E, g pewne parametry rzeczywiste—obecność g może być interpretowana jako pewne zaburzenie sytuacji w której oba poziomy miały tę samą energię E.

a) Znajdź stany własne i energie własne układu

b) Napisz ewolucję czasową stanu $|\psi(t)\rangle$ jeśli w chwili $t = 0$: $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. Po jakim czasie stan powróci do stanu początkowego

Zadanie 7 Udowodnij, że transformata Fouriera zachowuje iloczyn skalarny funkcji (innymi słowy, że jest operacją unitarną), czyli że:

$$\int \mathrm{d}x\, \psi^*(x)\phi(x) = \int \mathrm{d}p\, \tilde{\psi}^*(p)\tilde{\phi}(p), \quad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \mathrm{d}x e^{-ipx/\hbar}\psi(x).$$

Zadanie 8 Rozważ gausowską funkcję falową w jednym wymiarze:

$$\psi(x) = A \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{4\sigma^2} + \frac{\mathrm{i}p_0 x}{\hbar}\right) \tag{2}$$

a) Wyznacz wartość stałej normalizacyjnej A

b) Napisz i zinterpretuj wyrażenie na prąd prawdopodobieństwa

c) Na ćwiczeniach wyprowadziliśmy wzór na rozmywanie sie paczki falowej, mówiący że wariancja położenia po czasie t, wynosi $\Delta^2 x(t) = \sigma^2[1 + (t/\tau)^2]$, gdzie $\tau = 2m\sigma^2/\hbar$ jest charakterystycznym czasem rozpływania się paczki. Oszacuj ten czas dla elektronu zlokalizowanego na skali rozmiarów atomu, oraz np. pchły.

Zadanie 9 Rozważ cząstkę swobodną o masie m przygotowaną w stanie opisanym funkcją falową

$$\psi(x) = Axe^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}} \tag{3}$$

a) Wyznacz stałą normalizacyjną A

b) Oblicz $\Delta^2 x$, $\Delta^2 p$ i sprawdź spełnienie zasady nieoznaczoności Heisenberga

c) Znajdź funkcję falową tej cząstki po czasie t. Wyznacz, też $\Delta^2 x(t)$, $\Delta^2 p(t)$. Porównaj, czy stan tego typu doznaje szybszego rozpływania się, co analogiczny stan gaussowski, tzn. stan gaussowski o takim samym początkowym rozrzucie położeń.